



Analysis
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)

Baden-Württemberg - berufliche Gymnasien
Abitur 2027 / 2028

Autor: Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: www.mathe-aufgaben.com

Vorwort

Zunächst einmal bedanken wir uns für das Vertrauen, das ihr uns mit dem Kauf dieses Buches entgegengebracht habt!

Der darin enthaltene Stoff der **Analysis** ist auf den Inhalt der **schriftlichen Abiturprüfung 2027 und 2028 (erhöhtes Anforderungsniveau eAn)** von **Baden-Württemberg** für **berufliche Gymnasien** abgestimmt.

Das Buch soll euch bei der erfolgreichen Vorbereitung auf Klausuren und die schriftliche Abiturprüfung unterstützen.

In den einzelnen Kapiteln stellen wir zunächst die einzelnen Themen und die erforderlichen Formeln und Rechenwege mit Hilfe von vielen Beispielen ausführlich vor.

Nach jedem Kapitel findet ihr viele Übungsaufgaben, bei denen der jeweilige Anforderungsbereich steht.

Anforderungsbereich I: Reproduktion des Stoffes (einfache Grundaufgaben)

Anforderungsbereich II: Herstellung von Zusammenhängen (mittelschwere Aufgaben)

Anforderungsbereich III: Verallgemeinerung und Reflexion (schwierigere Aufgaben)

Für das Erreichen von mindestens 5 Notenpunkten müssen die Aufgaben zum Anforderungsbereich I und teils auch vom Anforderungsbereich II gelöst werden.

Für das Erreichen von mindestens 11 Notenpunkten müssen die Aufgaben zu allen 3 Anforderungsbereichen gelöst werden.

Damit habt ihr die Möglichkeit zu prüfen, ob ihr den Stoff auch tatsächlich verstanden habt und wie euer ungefähre Leistungsstand ist.

Die Merkhilfe, die ihr für die Abiturprüfung im Teil B benutzen dürft, findet ihr als Link auf unserer Homepage.

Die Musterlösungen aller Übungsaufgaben aus dem Buch werden als pdf-Dateien über einen geschlossenen Download-Bereich auf unserer Homepage zur Verfügung gestellt.



VORSICHT FALLE:

Nach unserer Erfahrung hilft es euch, wenn wir nicht nur darstellen, wie etwas gemacht wird, sondern auch, welche typischen Fehler auftreten können.

Daher findet ihr in dem Buch zwischendurch auch „Vorsicht Falle“ – Hinweise mit typischen Fehlern, die aufgrund unserer langjährigen Erfahrung immer wieder gemacht werden.

In diesem Buch sind keine Original-Abiturprüfungsaufgaben der vergangenen Jahre enthalten.

Die alten Abituraufgaben könnt ihr inkl. Lösungen kostenfrei auf www.mathe-aufgaben.com unter dem Menüpunkt Aufgaben -> Abitur herunterladen.

Anregungen und konstruktive Kritik zu diesem Buch werden von uns gerne entgegengenommen.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und alles Gute für eure Abiturprüfung!

Euer Team von mathe-aufgaben.com

Inhaltsverzeichnis

1	Der Begriff der Funktion	1
2	Lineare Funktionen	6
2.1	Lösen von linearen Gleichungen	6
2.2	Lösen von linearen Ungleichungen	7
2.3	Lösen von Betragsgleichungen	8
2.4	Schaubild einer linearen Funktion	9
2.5	Punktprobe und Schnittpunkte	10
2.5.1	Punktprobe	10
2.5.2	Schnittpunkte einer Gerade mit den Koordinatenachsen / Nullstelle	11
2.5.3	Schnittpunkt von zwei Geraden	12
2.6	Aufstellen einer linearen Funktion	12
2.7	Besondere Lagen zweier Geraden	15
2.8	Steigungswinkel einer Geraden und Schnittwinkel zweier Geraden	16
2.9	Länge einer Strecke im Koordinatensystem	17
3	Polynomfunktionen / Ganzrationale Funktionen	18
3.1	Lösen von Polynomgleichungen	18
3.2	Schaubilder von Polynomfunktionen	24
3.3	Nullstellen und Produktformen von Polynomfunktionen	27
3.3.1	Nullstellen einer Polynomfunktion	27
3.3.2	Lösen von quadratischen Ungleichungen	28
3.3.3	Nullstellen einer Polynomfunktion mit dem WTR	29
3.3.4	Die Produktform einer Polynomfunktion und vielfache Nullstellen	30
3.4	Aufstellen von Polynomfunktionen in Produktform und Scheitelform	33
3.4.1	Aufstellen von quadratischen Funktionen in der Scheitelform	33
4	Exponentialfunktionen	36
4.1	Was ist eine Exponentialfunktion?	36
4.2	Logarithmen und Exponentialgleichungen	38
4.2.1	Was ist ein Logarithmus?	38
4.2.2	Der Logarithmus $\ln$	39
4.2.3	Exponentialgleichungen und Exponentialungleichungen	41
4.3	Asymptoten von Exponentialfunktionen	45
4.4	Aufstellen von Exponentialfunktionen	48
5	Gebrochenrationale Funktionen	50
5.1	Waagrechte Asymptoten	50
5.2	Senkrechte Asymptoten	56
5.3	Aufstellen von gebrochenrationalen Funktionen	58
5.4	Bruchgleichungen	61
6	Trigonometrische Funktionen	63
6.1	Sinus und Kosinus am Einheitskreis	63
6.2	Die verallgemeinerte Sinus- und Kosinusfunktion	65
6.3	Trigonometrische Gleichungen ohne Taschenrechnernutzung	70
6.4	Trigonometrische Gleichungen mit Taschenrechnernutzung	73
7	Verschiebung, Streckung von Schaubildern	77
8	Ableitungsregeln	81
8.1	Definition der Ableitungsfunktion mit Differenzenquotient	81
8.2	Ableitungsregeln	84
8.2.1	Ableitungsregeln der Grundfunktionen	84
8.2.2	Produktregel	86
8.2.3	Kettenregel	88
8.3	Interpretation der ersten und zweiten Ableitungsfunktion	94
9	Kurvenuntersuchung	97
9.1	Schnittpunkt eines Schaubildes mit Koordinatenachsen / Nullstellen	97

9.2	Symmetrie von Schaubildern	98
9.3	Extrempunkte.....	100
9.4	Monotonie	105
9.5	Wendepunkte und Sattelpunkte	110
10	Tangenten, Schnitt, Berührung	116
10.1	Aufstellen von Tangentengleichungen	116
10.2	Schnittpunkt von zwei Schaubildern.....	119
10.3	Winkelberechnung zwischen zweier Schaubildern	120
10.4	Berührung zweier Schaubilder, Tangentennachweis.....	122
11	Umkehrfunktionen	124
11.1	Begriff der Umkehrfunktion, Definitions- und Wertemenge	124
11.2	Die Logarithmusfunktion	127
11.3	Wurzelfunktion und Umkehrbarkeit von Funktionen	129
11.3.1	Wurzelgleichungen.....	132
11.4	Ableiten von Umkehrfunktionen	133
12	Anwendung der Differenzialrechnung	135
12.1	Exponentielles und beschränktes Wachstum	135
12.2	Mittlere und momentane Änderungsrate	140
12.3	Kostentheorie.....	145
13	Aufstellen von Funktionen (Steckbriefaufgaben)	150
13.1	Lösen linearer Gleichungssysteme	150
13.2	Lösen von Steckbriefaufgaben.....	153
14	Optimierungsprobleme und Zielwertsuche	157
14.1	Absolutes Minimum/Maximum	157
14.2	Optimierungsprobleme (Extremwertaufgaben).....	158
14.3	Zielwertsuche.....	162
15	Funktionen mit Parametern.....	166
16	Integralrechnung.....	171
16.1	Flächenberechnung mit Untersummen und Obersummen	171
16.2	Berechnung von Stammfunktionen	174
16.3	Integrale.....	179
16.4	Flächenberechnung zwischen Schaubildern	181
16.5	Volumen von Rotationskörpern	189
16.6	Flächen unterhalb von Änderungsraten-/Geschwindigkeitsfunktionen.....	192
16.7	Die Integralfunktion	197
17	Graphen von f, f' und F.....	201
17.1	Eigenschaften des Schaubildes einer Ableitungsfunktion.....	202
17.2	Eigenschaften des Schaubildes einer Stammfunktion	202
18	Regressionsrechnung	208

1 Der Begriff der Funktion

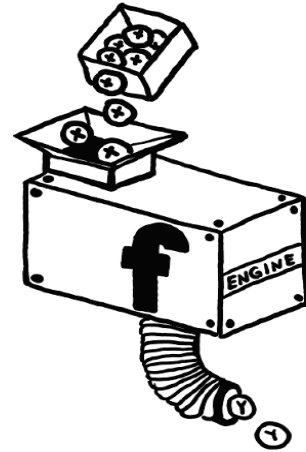
Beim Thema "Analysis" stehen Funktionen im Mittelpunkt.

Bereits in der Mittelstufe habt ihr euch im Zusammenhang mit Geraden und Parabeln mit Funktionen beschäftigt.

Aber keine Sorge: Ihr braucht nun nicht in alten Unterrichtsaufschrieben stöbern. Den Stoff, den ihr aus der Mittelstufe für eure Prüfung benötigt, wird in dem Buch ausführlich wiederholt.

Zunächst schauen wir uns an, was man unter einer "Funktion" überhaupt versteht.

Eine Funktion könnt ihr euch als Rechenmaschine vorstellen: Oben wird eine Zahl als x-Wert hineingegeben. Die Maschine berechnet damit genau einen y-Wert und gibt diesen aus.



Die Zahlenmenge der x-Werte, die in die Maschine hineingegeben werden können, heißt die *Definitionsmenge* der Funktion.

Die Zahlenmenge der y-Werte, die als Ergebnisse ausgegeben werden heißt die *Wertemenge* der Funktion.

Das Ganze lautet dann mathematisch exakt formuliert so:

Eine Funktion f ist eine Zuordnung, die jeder Zahl x aus einer **Definitionsmenge** D genau eine Zahl $y = f(x)$ aus der **Wertemenge** W zuordnet.

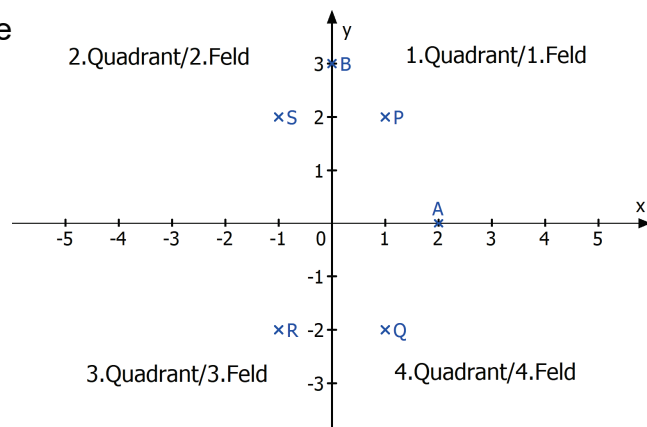
x wird hierbei die **Variable** der Funktion genannt.

Damit ihr zu einer Funktion das zugehörige Schaubild zeichnen könnt, benötigt ihr ein Koordinatensystem mit einer x-Achse (waagrecht) und einer y-Achse (senkrecht). Ein Punkt im Koordinatensystem wird durch zwei Koordinaten angegeben.

Quadranten/Felder im Koordinatensystem

Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in 4 Quadranten/Felder auf:

Der Punkt $P(1|2)$ liegt im 1. Quadrant.
 Der Punkt $S(-1|2)$ liegt im 2. Quadrant.
 Der Punkt $R(-1|-2)$ liegt im 3. Quadrant.
 Der Punkt $Q(1|-2)$ liegt im 4. Quadrant.
 Der Punkt $A(2|0)$ liegt auf der x-Achse.
 Der Punkt $B(0|3)$ liegt auf der y-Achse.



Eine Funktion könnt ihr in unterschiedlicher Form darstellen:

- **als Funktionsterm:** $f(x) = x^2 - x$ oder $y = x^2 - x$

Hinweis: In der Oberstufe wird die Schreibweise $f(x) = \dots$ und nicht $y = \dots$ genutzt (Ausnahme bei Geradengleichungen in Kapitel 2).

- **als Wertetabelle:**

x	-2	-1	0	1	2
y	6	2	0	0	2

Die x-Werte sind in der Wertetabelle beliebig vorgegeben.
Die y-Werte berechnet ihr durch Einsetzen der x-Werte in die Funktionsgleichung.

Beispiel für $x = -1$: $f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 2$

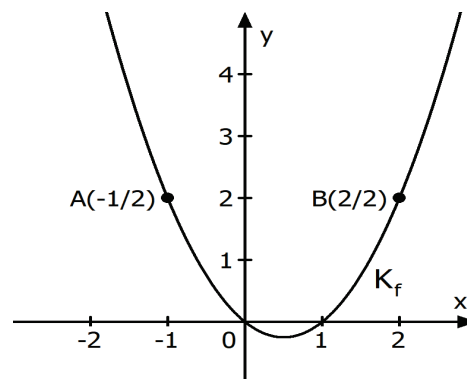
Beispiel für $x = 2$: $f(2) = 2^2 - 2 = 2$

Aus der Wertetabelle könnt ihr Punkte des Schaubildes der Funktion ablesen.
Beispiel: A(-1|2) oder B(2|2)

Die in der Prüfung zugelassenen Taschenrechner können nach Eingabe einer Funktion solch eine Wertetabelle anzeigen. Wie dies bei eurem Taschenrechner funktioniert, solltet ihr aus dem Unterricht kennen und ansonsten bei eurer Lehrkraft nachfragen.

- **als Schaubild / als Graph**

Das Schaubild einer Funktion f wird meist mit einem Großbuchstaben bezeichnet (z.B. K oder K_f) und kann mit Hilfe der Wertetabelle gezeichnet werden, indem ihr die berechneten Punkte einzeichnet und diese dann verbindet.



Der x-Wert eines Punktes wird in der Fachsprache als **Stelle** bezeichnet.

Der y-Wert eines Punktes wird in der Fachsprache als **Funktionswert** bezeichnet.

Erklärung der Schreibweise $f(a) = b$:

Der Ausdruck $f(-1) = 2$ sagt aus:

- 1.) Der Punkt A(-1|2) liegt auf dem Schaubild von f.
- 2.) Die Funktion f nimmt an der Stelle $x = -1$ den y-Wert 2 an.

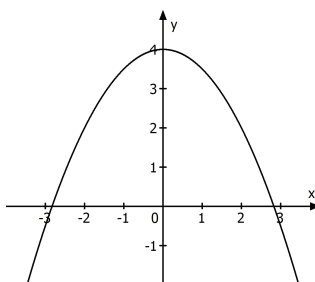
Zur Angabe von Zahlenmengen (z.B. für die Definitionsmenge oder Wertemenge einer Funktion) benötigt ihr folgende Schreibweisen:

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$: Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$: Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen (Menge aller Zahlen, die man als Bruch schreiben kann)
- $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen (Menge aller Zahlen, die ihr kennt)
- $\mathbb{R}^+$ stellt die Menge der positiven reellen Zahlen dar
- $\mathbb{R}_0^+$ stellt die Menge der positiven reellen Zahlen dar einschließlich der Zahl 0
- $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stellt die Menge der reellen Zahlen dar mit Ausnahme von 1
- $[1; 4] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$ ist das Intervall aller Zahlen von 1 bis 4 einschließlich der Randzahlen 1 und 4.
- $]1; 4[= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$ ist das Intervall aller Zahlen von 1 bis 4 ohne die Randzahlen 1 und 4.
- $[1; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ sind alle Zahlen größer oder gleich 1
- $]-\infty; 4] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$ sind alle Zahlen kleiner oder gleich 4

Anstatt der eckigen Klammern nach außen könnten alternativ auch runde Klammern genutzt werden, also $]1; 4[= (1; 4)$. In diesem Buch wird jedoch die Schreibweise der eckigen Klammern benutzt.

Beispiel 1.1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0,5x^2 + 4$



Die Funktion $f(x)$ besitzt die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, da ihr für die Variable x jede beliebige Zahl einsetzen dürft.

Beispiel: $f(-2) = -0,5 \cdot (-2)^2 + 4 = 2$

Aus dem Schaubild könnt ihr erkennen, dass der Punkt $P(0|4)$ der höchste Punkt des Schaubildes ist. Die Funktion kann somit als größten y -Wert die Zahl 4 annehmen. Die Wertemenge der Funktion f ist $W_f =]-\infty; 4]$.

.....



VORSICHT FALLE:

Ein Hinweis zur mathematischen Fachsprache:

Richtig: „Das Schaubild von f verläuft durch den Punkt $P(2|3)$.“

Falsch: „Die Funktion f verläuft durch den Punkt $P(2|3)$.“

Ihr müsst sprachlich zwischen der Funktion f und deren Schaubild unterscheiden!

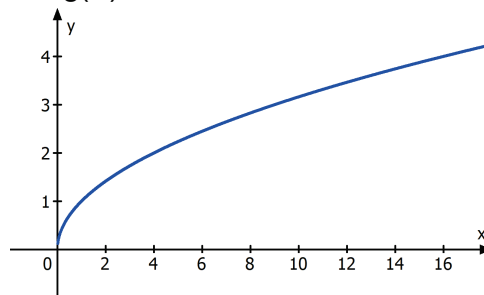
Richtig: „An der Stelle $x = 1 \dots$ “

Falsch: „Im Punkt $x = 1 \dots$ “ (ein Punkt besteht immer aus 2 Koordinaten)

.....

Beispiel 1.2:

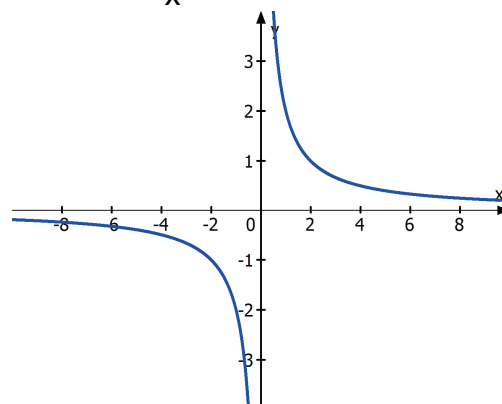
a) Gegeben ist die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$.



Da unter einer Wurzel keine negativen Zahlen stehen dürfen, ist die Definitionsmenge der Funktion $D = [0; +\infty[= \mathbb{R}_0^+$.

Die Wertemenge könnt ihr am Schaubild ablesen: $W = [0; +\infty[= \mathbb{R}_0^+$.

b) Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{2}{x}$.



Da man nicht durch Null dividieren darf, ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Die Wertemenge könnt ihr am Schaubild ablesen: $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Begründung: Die Funktion kann jeden y -Wert annehmen mit Ausnahme von $y = 0$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1-1: (I)

Formuliere mithilfe der mathematischen Kurzschreibweise $f(a) = b$:

- An der Stelle 4 hat die Funktion f den Funktionswert 6.
- Durch die Funktion f wird dem x -Wert 2 die Zahl -4 zugeordnet.
- Der Punkt $P(1|3)$ liegt auf dem Schaubild von f .
- Das Schaubild K_f von f schneidet die x -Achse in $x = 3$.
- Das Schaubild K_f von f schneidet die y -Achse auf der Höhe $y = -6$.

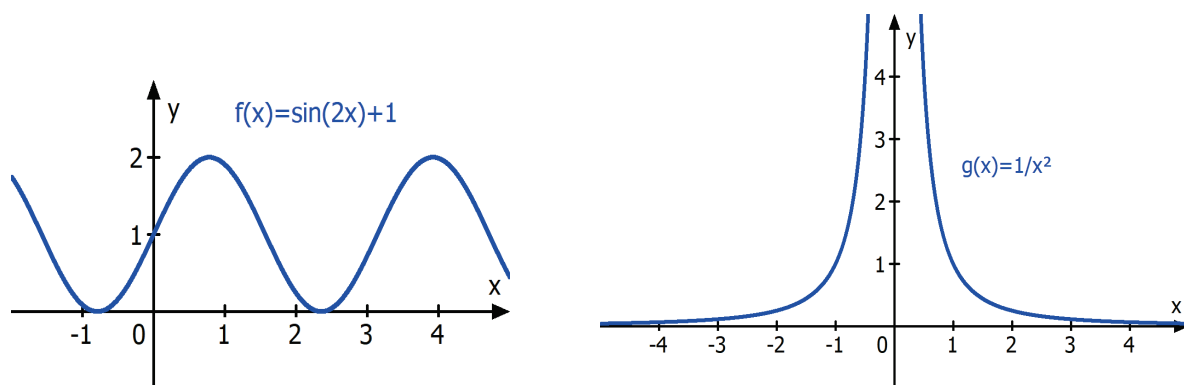
Aufgabe 1-2: (I)

Formuliere die mathematische Aussage mit eigenen Worten.

- $f(5) = 8$
- $f(3) = g(3)$
- $f(5) = f(2)$

Aufgabe 1-3: (I)

Gib die Wertemenge der folgenden Funktionen an:



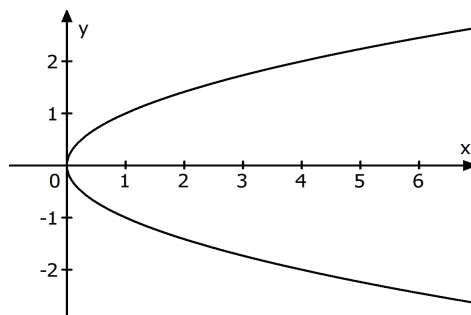
Aufgabe 1-4: (I)

Bestimme den Funktionswert an der Stelle -2 für die folgenden Funktionen. Bestimme außerdem die maximale Definitionsmenge der Funktionen.

- $f(x) = x^2 - x$
- $g(x) = \sqrt{x+4}$
- $h(x) = \frac{2}{x-1}$

Aufgabe 1-5: (I)

Warum kann die folgende Abbildung kein Schaubild einer Funktion f sein?



2 Lineare Funktionen

2.1 Lösen von linearen Gleichungen

Lineare Gleichungen könnt ihr direkt nach x auflösen.

- 1.Schritt: Vorhandene Klammern auflösen (Klammerregeln beachten)
- 2.Schritt: Beide Seiten der Gleichung zusammenfassen
- 3.Schritt: Terme mit „ x “ auf die linke Seite und Zahlen ohne „ x “ auf die rechte Seite bringen
- 4.Schritt: Division der Gleichung durch die Zahl, die an x anmultipliziert ist.

Beispiel 2.1:

$$2(x + 4) + (x - 2) = 2x - 5 - (x + 1) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8 + x - 2 = 2x - 5 - x - 1 \quad | \text{ Beide Seiten zusammenfassen}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 = x - 6 \quad | - x - 6$$

$$\Leftrightarrow 2x = -12 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x = -6$$

In einer Gleichung kann neben der Variable x noch zusätzlich ein Parameter enthalten sein.

Ein Parameter ist ein Buchstabe, der für eine feste, nicht vorgegebene Zahl steht.

Beispiel 2.2:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x + 4a &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 3 - 2a \end{aligned}$$

Für jeden Wert von a ergibt sich genau eine Lösung für x .

$$\begin{aligned} \text{b) } ax &= x + 3 \\ \text{Hier müsst ihr nach dem Sortieren der Terme die Variable } x &\text{ ausklammern.} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow ax - x = 3$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (a - 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{a-1} \quad \text{wobei } a \neq 1 \text{ sein muss (ansonsten würdet ihr durch Null dividieren)}$$

Für $a \neq 1$ besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

Fall $a = 1$:

Die ursprüngliche Gleichung lautet $x = x + 3$.

Umgeformt ergibt sich $0 = 3$.

Da hierbei ein Widerspruch entsteht, ist die Gleichung für $a = 1$ nicht lösbar.

Übungsaufgaben

Aufgabe 2-1: (I)

Löse die Gleichung.

a) $20x - 3 \cdot (5x + 7) = -2 \cdot (3 - x)$

b) $4x + (-x - 2) = 5(x + 1) - (4x + 1)$

Aufgabe 2-2: (II)

Löse die Gleichung und gib die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von a an.

a) $-3x = 2ax + 2$

b) $a^2 \cdot x = 4$

c) $ax = 3a$

2.2 Lösen von linearen Ungleichungen

Es gibt einfache Ungleichungen, die ihr direkt nach x auflösen könnt.

Hierbei ist aber folgende Regel zu beachten:

Multipliziert oder dividiert ihr eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dann **dreht sich das Ungleichheitszeichen um!**

Beispiel 2.3:

a) $-3x + 6 < 5x + 14 \quad | -5x - 6$

$\Leftrightarrow -8x < 8 \quad | : (-8)$

$\Leftrightarrow x > -1$

b) $-4(2x + 5) \geq -10x + 4$

$\Leftrightarrow -8x - 20 \geq -10x + 4 \quad | +10x + 20$

$\Leftrightarrow 2x \geq 24 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow x \geq 12$

Bei a) dreht sich im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Übungsaufgaben

Aufgabe 2-3: (I)

Löse die Ungleichung:

a) $-3x - 2 < 0$

b) $-x \leq -\frac{2}{3}x - 1$

2.3 Lösen von Betragsgleichungen

Eine Betragsgleichung erkennt ihr daran, dass die Variable x innerhalb von Betragstrichen steht.

Der Betrag einer Zahl gibt - geometrisch interpretiert – den Abstand der Zahl von der 0 auf dem Zahlenstrahl an.

Beispiele: $|4| = 4$ $|-5| = 5$ $|0| = 0$

Die Betragsstriche wirken sich nur dann aus, wenn die Zahl negativ ist.

Die Betragsgleichung $|x| = 4$ wird dann erfüllt, wenn der Term zwischen den Betragsstrichen 4 oder -4 ergibt.

Somit gibt es die beiden Lösungen $x = 4$ und $x = -4$.

Um eine Betragsgleichung zu lösen, müsst ihr die Betragsstriche weglassen und dann eine Fallunterscheidung durchführen.

.....

Beispiel 2.4:

a) $|2x - 6| = 10$

1.Fall: $2x - 6 = 10 \Leftrightarrow x = 8$

2.Fall: $2x - 6 = -10 \Leftrightarrow x = -2$

Lösungsmenge: $L = \{8 ; -2\}$

b) $|x + 2| = 0$

Hier braucht man keine Fallunterscheidung:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Lösungsmenge: $L = \{-2\}$

c) $|x + 2| = -4$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung, da das Ergebnis eines Betrags nie negativ werden kann.

Lösungsmenge: $L = \{ \}$

.....

Übungsaufgaben

Aufgabe 2-4: (II)

Löse die Gleichung.

a) $|x + 15| = 15$

b) $|0,5x - 1| = 9$

c) $|x - 16| = -6$

d) $\frac{|24 - x|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

2.4 Schaubild einer linearen Funktion

Das Schaubild einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Eine lineare Funktion besitzt die Bauart $y = m \cdot x + b$.

b = Schnitthöhe der Gerade auf der y-Achse = y-Achsenabschnitt

m = Steigung der Gerade

Beispiel 2.5:

a) $y = -2x + 4$: Steigung $m = -2$ und y-Achsenabschnitt $b = 4$.

b) $y = x$: Steigung $m = 1$ und y-Achsenabschnitt $b = 0$

c) $y = 6$: Steigung $m = 0$ und y-Achsenabschnitt $b = 6$

Die Steigung einer Gerade könnt ihr grafisch mit einem Steigungsdreieck bestimmen.

$$\text{Steigung der Gerade} = m = \frac{\text{senkrechte Strecke}}{\text{waagrechte Strecke}}$$

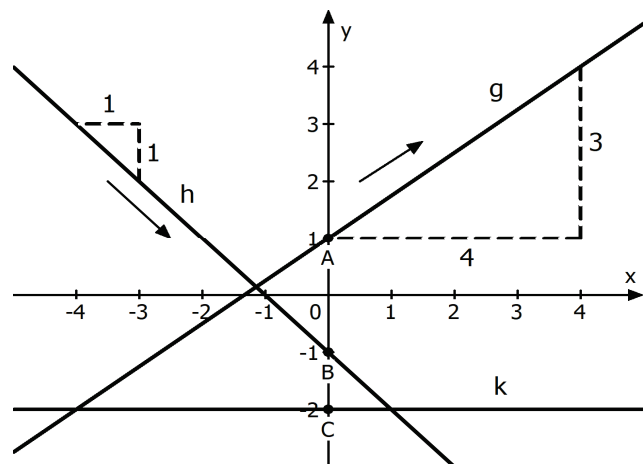
Gerade g: $m = \frac{3}{4}$

(positiv, da Gerade aufwärts verläuft)

Gerade h: $m = -\frac{1}{1} = -1$

(negativ, da Gerade abwärts verläuft)

Gerade k: $m = 0$ (waagrechte Gerade).



Vorgehen beim Zeichnen des Schaubildes (Gerade) von $y = mx + b$

1.) Markiere im Koordinatensystem den Punkt $(0|b)$ auf der y-Achse.

2.) Falls die Steigung m keine Bruchzahl ist, schreibe sie als Bruchzahl um.

(z.B. aus $m = 3$ wird $m = \frac{3}{1}$)

3.) Gehe vom Punkt $(0|b)$ auf der y-Achse mit dem **Nenner** der Bruchzahl **nach rechts** und mit dem **Zähler** nach **oben** (positive Steigung) oder nach **unten** (bei negativer Steigung) und markiere den Zielpunkt.

4.) Verbinde den Punkt $P(0|b)$ und den Zielpunkt zu einer Geraden

Beispiel 2.6:

Zeichne die Schaubilder der Funktionen $g: y = -\frac{2}{3}x - 1$ und $h: y = 2x + 1$.

Gerade g:

$b = -1$: Schnittpunkt mit der y-Achse

$B(0|-1)$

$m = -\frac{2}{3}$: Steigungsdreieck von B aus:

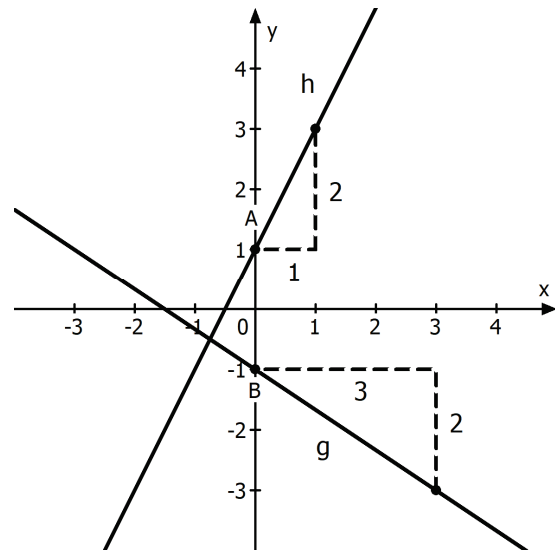
3 nach rechts und 2 nach unten

Gerade h:

$b = 1$: Schnittpunkt mit der y-Achse $A(0|1)$

$m = 2 = \frac{2}{1}$: Steigungsdreieck von A aus:

1 nach rechts und 2 nach oben



Eine senkrechte Gerade (parallel zur y-Achse) hat eine unendliche Steigung. Sie kann nicht durch die Gleichung $y = mx + b$ dargestellt werden, sondern durch eine Gleichung der Gestalt $x = c$.

Eine senkrechte Gerade die durch $P(2|0)$ verläuft hat die z.B. die Gleichung $x = 2$.

Übungsaufgaben**Aufgabe 2-5: (I)**

Zeichne die Schaubilder der Funktionen g und h in ein Koordinatensystem ein.

a) $g: y = -\frac{3}{2}x - 2$; $h: y = 1 + 2x$ b) $g: y = \frac{3}{5}x - 3$; $h: y = 2 - x$

2.5 Punktprobe und Schnittpunkte**2.5.1 Punktprobe**

Mit Hilfe einer Punktprobe könnt ihr rechnerisch prüfen, ob ein gegebener Punkt auf dem Schaubild einer Funktion liegt.

Hierzu setzt ihr den x-Wert und y-Wert des Punktes in die Funktionsgleichung ein.

Ergibt sich eine wahre Aussage, liegt der Punkt auf dem Schaubild.

Ergibt sich eine falsche Aussage, liegt der Punkt nicht auf dem Schaubild.

Beispiel 2.7:

Gegeben ist die Geradengleichung $y = 0,2x + 1$.

Liegt der Punkt $P(7|2,4)$ auf der Gerade?

Einsetzen von $x = 7$ und $y = 2,4$ in den Funktionsterm: $2,4 = 0,2 \cdot 7 + 1$

Es entsteht eine wahre Aussage $2,4 = 2,4$, somit liegt P auf der Gerade.

Liegt der Punkt $R(-7|0)$ auf der Gerade?

Einsetzen von $x = -7$ und $y = 0$ in den Funktionsterm: $0 = 0,2 \cdot (-7) + 1 \Rightarrow 0 = -0,4$

Es entsteht eine falsche Aussage $0 = -0,4$ und somit liegt R nicht auf der Gerade.

.....

Ist von einem Punkt nur eine Koordinate gegeben und soll der Punkt auf dem Schaubild einer Funktion liegen, müsst ihr die bekannte Koordinate des Punktes in den Funktionsterm einsetzen und die unbekannte Koordinate berechnen.

.....

Beispiel 2.8:

a) Berechne den y -Wert von Punkt $P(4|y)$, der auf der Geraden $y = 3x - 1$ liegt.

Einsetzen von $x = 4$: $y = 3 \cdot 4 - 1 = 11$ und damit $P(4|11)$

b) Berechne den x -Wert von Punkt $Q(x|5)$, der auf der Geraden $y = 2x - 3$ liegt.

Einsetzen von $y = 5$: $5 = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ und damit $Q(4|5)$

.....

2.5.2 Schnittpunkte einer Gerade mit den Koordinatenachsen / Nullstelle**Schnittpunkt mit der y-Achse:**

Setze in die Geradengleichung für $x = 0$ ein und berechne den y -Wert.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Setze in die Geradengleichung für $y = 0$ ein und berechne den x -Wert.

Nullstelle:

Die Nullstelle ist der x -Wert des Schnittpunktes mit der x -Achse.

.....

Beispiel 2.9:

Berechne die Schnittpunkte des Schaubildes von $y = 3x - 6$ mit den Koordinatenachsen und gib die Nullstelle an.

Schnittpunkt mit der y -Achse:

Setze $x = 0$: $y = 3 \cdot 0 - 6 = -6$ Schnittpunkt $M(0|-6)$

Schnittpunkt mit der x -Achse:

Setze $y = 0$: $0 = 3x - 6 \Leftrightarrow x = 2$ Schnittpunkt $N(2|0)$

Nullstelle: $x = 2$

.....

2.5.3 Schnittpunkt von zwei Geraden

Mit den folgenden Schritten berechnet ihr den Schnittpunkt zweier Geraden.

- 1.) Gleichungen der Geraden gleichsetzen und die entstehende Gleichung lösen.
Damit berechnet ihr die **Schnittstelle** (x-Wert des Schnittpunktes).
- 2.) Nun setzt ihr die Schnittstelle in eine der Geradengleichungen ein und berechnet den y-Wert des Schnittpunktes.

.....

Beispiel 2.10:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden g: $y = x + 1$ und h: $y = -2x + 4$.

- 1.) Gleichsetzen der Geraden: $x + 1 = -2x + 4 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$
Schnittstelle: $x = 1$.

- 2.) $x = 1$ in eine der Geradengleichungen einsetzen: $y = 1 + 1 = 2$

Schnittpunkt der Geraden: S(1|2)

.....

Übungsaufgaben

Aufgabe 2-6: (I)

Berechne die Schnittpunkte der Gerade mit den Koordinatenachsen:

- a) $y = -4x - 6$ b) $y = 2x - \frac{7}{3}$

Aufgabe 2-7: (I)

Bestimme sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch die Schnittpunkte der beiden Geraden g: $y = \frac{1}{2}x + 2$ und h: $y = x + 3$.

2.6 Aufstellen einer linearen Funktion

Allgemeine Geradengleichung: $y = m \cdot x + b$

Es gibt 3 mögliche Vorgaben, um eine Geradengleichung aufzustellen:

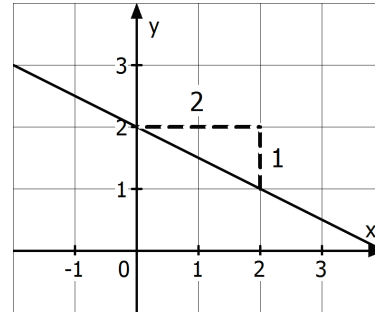
1. Möglichkeit: Gegeben ist das Schaubild der Gerade

- 1.) Stelle die allgemeine Geradengleichung auf: $y = m \cdot x + b$
- 2.) Lies den Wert von b ab (Höhe, bei der die Gerade die y-Achse schneidet)
- 3.) Lies den Wert von m ab (Einzeichnen eines Steigungsdreiecks und Steigungsberechnung gemäß Beispiel 2.3)
- 4.) Setze die Werte von m und b in die allgemeine Geradengleichung ein

Beispiel 2.11:

Für die Gerade gilt $b = 2$ und $m = -\frac{1}{2}$.

Gleichung der Gerade: $y = -\frac{1}{2}x + 2$



2. Möglichkeit: Gegeben ist die Steigung m und ein Punkt P der Gerade

- 1.) Stelle die allgemeine Geradengleichung auf: $y = m \cdot x + b$
- 2.) Setze die gegebene Steigung m in die Geradengleichung ein.
- 3.) Setze die Koordinaten des Punktes für x und y ein und berechne b .
- 4.) Setze die Werte von m und b in die allgemeine Geradengleichung ein.

Beispiel 2.12:

Stelle die Gleichung der Gerade auf, die die Steigung $m = -3$ besitzt und durch den Punkt $A(3|4)$ verläuft.

- 1.) Allgemeine Geradengleichung: $y = m \cdot x + b$
- 2.) $m = -3$ in die Geradengleichung einsetzen: $y = -3x + b$
- 3.) $x = 3$ und $y = 4$ einsetzen: $4 = -3 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 13$
- 4.) Gleichung der Gerade: $y = -3x + 13$

3. Möglichkeit: Gegeben sind zwei Punkte P und Q der Gerade

- 1.) Stelle die allgemeine Geradengleichung auf: $y = m \cdot x + b$
- 2.) Berechne die Steigung der Gerade mit der Formel $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ und setze die Steigungszahl in die Geradengleichung ein.
- 3.) Setze die Koordinaten von einem der beiden Punkte für x und y in die Geradengleichung ein und berechne b .
- 4.) Setze die Werte von m und b in die allgemeine Geradengleichung ein.

Beispiel 2.13:

Stelle die Gleichung der linearen Funktion auf, deren Schaubild durch die Punkte P(1|1) und Q(-2|-5) verläuft.

1.) Ansatz der Geradengleichung: $y = m \cdot x + b$

$$2.) m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-5 - 1}{-2 - 1} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Einsetzen in die Geradengleichung: $y = 2x + b$

3.) Koordinaten von Q einsetzen: $-5 = 2 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = -1$

4.) Gleichung der Gerade: $y = 2x - 1$

.....

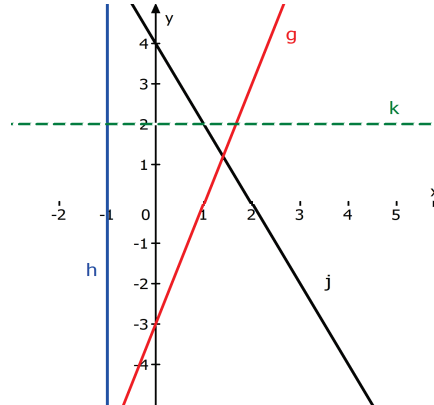
Es gibt zwei besondere Geraden, die eine spezielle Bezeichnung besitzen:

Die Gerade $y = x$ nennt man **1. Winkelhalbierende**.

Die Gerade $y = -x$ nennt man **2. Winkelhalbierende**.

Übungsaufgaben**Aufgabe 2-8: (I)**

Stelle die Gleichungen der Geraden g, h, j und k auf.

**Aufgabe 2-9: (I)**

Bestimme die Gleichung der Geraden g mit folgenden Eigenschaften:

a) g hat die Steigung $m = 3$ und verläuft durch A(1|1,5).

b) g verläuft durch A(1|-2) und B(-2|10).