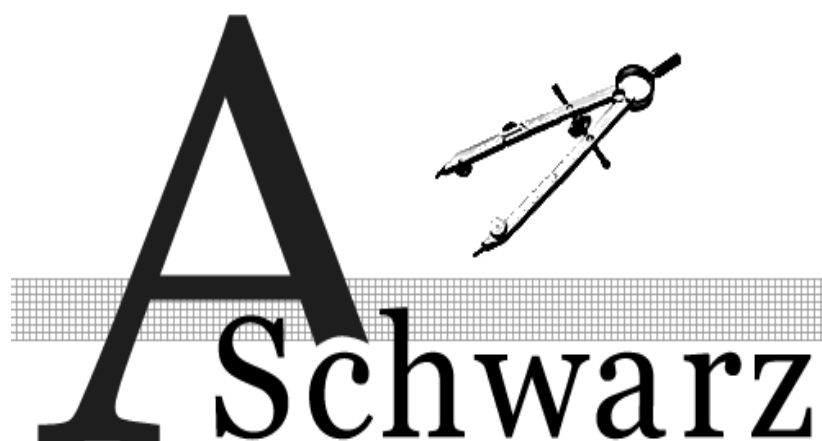




Mathematikbuch
für die Fachhochschulreife 2027/2028
Baden-Württemberg - Berufskolleg

Analysis

Autor: Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: www.mathe-aufgaben.com

Vorwort

Liebe SchülerInnen und Schüler,

mit diesem Buch könnt ihr euch perfekt auf eure Fachhochschulreifeprüfung 2027 und 2028 im Fach Mathematik in Baden-Württemberg vorbereiten.

Es begleitet euch Schritt für Schritt durch alle prüfungsrelevanten Themen und bietet eine klare Struktur, die euch sicher durch die Lernphase führt.

Die Kapitel 1 bis 14 vermitteln euch das gesamte Grundlagen- und Prüfungswissen in verständlicher, praxisnaher Form. Zahlreiche Beispiele und abwechslungsreiche Übungsaufgaben unterstützen euch dabei, jedes Thema nachhaltig zu verinnerlichen.

Vor der Abschlussprüfung solltet ihr euch außerdem mit der **Merkhilfe** – einer kurzen Formelsammlung – vertraut machen, die ihr im Wahlteil verwenden dürft. Ihr findet sie über einen Link auf unserer Homepage.



FEHLER ERKENNEN – ERFOLG STEIGERN

Nach unserer Erfahrung hilft es, wenn man nicht nur darstellt, wie etwas gemacht wird, sondern auch, welche Fehler auftreten können. Deshalb zeigen wir euch typische Stolperfallen, die bei der Bearbeitung von Aufgaben immer wieder vorkommen. Dieses Wissen verschafft euch einen wertvollen Vorsprung.

In den Kapiteln 15 und 16 findet ihr zusätzlich **7 Pflichtteilaufgabensätze** und **14 Wahlteilaufgabensätze** auf Prüfungsniveau. Damit könnt ihr realitätsnah trainieren und euer Selbstvertrauen für die Prüfung stärken.

Die ausführlichen Musterlösungen zu allen Aufgaben stehen euch als PDF-Datei in einem geschützten Bereich unserer Homepage zur Verfügung. So könnt ihr eure Ergebnisse zuverlässig überprüfen.

Zur weiteren Prüfungsvorbereitung empfehlen wir euch die Original-Prüfungsaufgaben ab 2018, die inklusive Musterlösungen kostenfrei auf unserer Homepage abrufbar sind. Dort findet ihr auch alle wichtigen Informationen zum Ablauf der Abschlussprüfung.

Wir wünschen euch viel Erfolg, Ausdauer und Freude beim Lernen - und natürlich eine erfolgreiche Prüfung.

Euer Team von **mathe-aufgaben.com**

Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen aufgeführt, die euch in der schriftlichen Abschlussprüfung erwarten.

Funktionstypen

- Potenzfunktionen wie z.B. $f(x) = ax^3$
- Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen) wie z.B. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Exponentialfunktionen der Bauart $f(x) = ae^{kx} + b$
- Trigonometrische Funktionen $f(x) = a \sin(bx) + d$ oder $g(x) = a \cos(bx) + d$

Schaubilder von Funktionen

- gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen
- Schnittpunkte zweier Schaubilder
- Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
- Verschiebung und Streckung von Schaubildern
- Spiegelung an der x-Achse
- Waagrechte Asymptoten bei Exponentialfunktionen
- Periode bei trigonometrischen Funktionen
- durchschnittliche und momentane Änderungsrate
- Anwendungsaufgaben (z.B. zu Wachstum oder Kostenfunktionen)
- Berechnung von Ableitungsfunktionen und Stammfunktionen
- Zusammenhang zwischen den Schaubildern einer Stammfunktion F sowie von f , f' und f''
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
- Steigungs- und Krümmungsverhalten: Extrem- und Wendepunkte (Sattelpunkte)
- Tangentengleichungen bestimmen
- Bestimmung von Funktionstermen aus Eigenschaften ihrer Schaubilder (Steckbriefaufgaben)
- Berechnung von Flächeninhalten mithilfe von Integralen
- Optimierungsaufgaben / Extremwertaufgaben

Lösen von Gleichungen

- Umformungen, pq-Formel oder abc-Formel, Ausklammern, Substitution
- Näherungsweise: grafisch
- Lösen von linearen Gleichungssystemen

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionen	1
2	Lineare Funktionen	5
2.1	Lösen linearer Gleichungen	5
c)	$4x + (-x - 2) = 5(x + 1) - (4x + 1)$	6
2.2	Schaubild einer linearen Funktion	6
2.3	Punktprobe und Schnittpunkte	8
2.3.1	Punktprobe	8
2.3.2	Schnittpunkte einer Gerade mit den Koordinatenachsen / Nullstelle	8
2.3.3	Schnittpunkt von zwei Geraden	9
2.4	Aufstellen einer linearen Funktion (Geradengleichung)	10
2.5	Parallele und orthogonale Geraden	12
2.6	Steigungswinkel einer Geraden	13
2.7	Länge einer Strecke im Koordinatensystem	14
3	Polynomfunktionen ab Grad 2	16
3.1	Lösen von Polynomgleichungen	16
3.2	Schaubilder von Polynomfunktionen	21
3.2.1	Symmetrie des Schaubildes einer Polynomfunktion	23
3.3	Nullstellen und Produktform von Polynomfunktionen	25
3.3.1	Nullstellen einer Polynomfunktion	25
3.3.2	Nullstellen einer Polynomfunktion mit Taschenrechner	26
3.3.3	Die Produktform einer Polynomfunktion und vielfache Nullstellen	27
3.4	Aufstellen von Polynomfunktionen in Produktform	30
4	Exponentialfunktionen	31
4.1	Was ist eine Exponentialfunktion?	31
4.2	Logarithmen und Exponentialgleichungen	32
4.2.1	Der Logarithmus $\ln$	32
4.2.2	Exponentialgleichungen	33
4.3	Waagrechte und schiefe Asymptoten	35
4.4	Nullstellen einer Exponentialfunktion	37
4.5	Aufstellen von Exponentialfunktionen	38
5	Trigonometrische Funktionen	39
5.1	Sinus und Kosinus am Einheitskreis	39
5.2	Die verallgemeinertes Sinus- und Kosinusfunktion	41
5.3	Trigonometrische Gleichungen ohne Taschenrechnernutzung	45
5.4	Trigonometrische Gleichungen mit Taschenrechnernutzung	47
6	Verschiebung, Streckung, Spiegelung von Schaubildern	51
7	Ableitungsregeln	55
7.1	Was ist eine Ableitungsfunktion?	55
7.2	Ableitungsregeln	57
7.2.1	Ableitung von Polynomfunktionen	57
7.2.2	Ableitung von e-Funktionen und trigonometrischen Funktionen	58
7.3	Interpretation der ersten und zweiten Ableitungsfunktion	59
8	Kurvenuntersuchung	63
8.1	Extrempunkte	63
8.2	Monotonie	67
8.3	Wendepunkte und Sattelpunkte	69
8.4	Zusammenhang der Schaubilder von f und f'	73
9	Tangenten, Schnittpunkte, Berührung	77
9.1	Aufstellen von Tangentengleichungen	77
9.2	Schnittpunkte von Schaubildern	80
9.3	Berührung zweier Schaubilder	81
9.4	Senkrechter Schnitt zweier Schaubilder	83

10	Lösen linearer Gleichungssysteme.....	84
10.1	Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.....	84
10.2	Drei Gleichungen mit drei Unbekannten.....	85
11	Aufstellen von Polynomfunktionen.....	90
12	Extremwertaufgaben / Optimierungsaufgaben	93
13	Integralrechnung.....	97
13.1	Berechnung von Stammfunktionen	97
13.2	Integrale.....	100
13.3	Flächeninhalt zwischen Schaubildern	101
14	Anwendungsaufgaben, Änderungsrate	107
14.1	Exponentielles Wachstum	107
14.2	Beschränktes Wachstum	109
14.3	Mittlere und momentane Änderungsrate	110
14.4	Kostentheorie.....	113
15	Musteraufgaben Pflichtteil	116
15.1	Pflichtteilaufgabensatz 1	116
15.2	Pflichtteilaufgabensatz 2	118
15.3	Pflichtteilaufgabensatz 3	119
15.4	Pflichtteilaufgabensatz 4	120
15.5	Pflichtteilaufgabensatz 5	121
15.6	Pflichtteilaufgabensatz 6	122
15.7	Pflichtteilaufgabensatz 7	123
16	Musteraufgaben Wahlteil	124
16.1	Wahlteilaufgabensatz 1	124
16.2	Wahlteilaufgabensatz 2	125
16.3	Wahlteilaufgabensatz 3	126
16.4	Wahlteilaufgabensatz 4	128
16.5	Wahlteilaufgabensatz 5	129
16.6	Wahlteilaufgabensatz 6	130
16.7	Wahlteilaufgabensatz 7	132
16.8	Wahlteilaufgabensatz 8	133
16.9	Wahlteilaufgabensatz 9	134
16.10	Wahlteilaufgabensatz 10	135
16.11	Wahlteilaufgabensatz 11	136
16.12	Wahlteilaufgabensatz 12	137
16.13	Wahlteilaufgabensatz 13	138
16.14	Wahlteilaufgabensatz 14	139

1 Funktionen

Bei eurer Abschlussprüfung stehen Funktionen im Mittelpunkt.

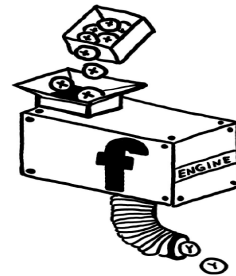
Bestimmte Funktionen wie Geraden oder Parabeln habt ihr bereits in der Mittelstufe kennengelernt.

Aber keine Sorge: Alles was ihr für die Prüfung braucht, wird in diesem Buch wiederholt und neu aufgebaut.

Was ist eine Funktion?

Ihr könnt euch eine Funktion wie eine Rechenmaschine vorstellen:

Ihr gebt eine Zahl (den **x-Wert**) ein, die Maschine rechnet damit **genau einen** passenden **y-Wert** als Ergebnis aus.



- Die Menge aller x-Werte, die ihr eingeben dürft, heißt **Definitionsmenge**.
- Die Menge aller y-Werte, die herauskommen können, heißt **Wertemenge**.

Mathematisch formuliert:

Eine Funktion f ordnet jeder Zahl x der **Definitionsmenge** D genau einen Wert $y = f(x)$ aus der **Wertemenge** W zu.

Der Wert x heißt **Variable**.

Koordinatensystem und Punkte

Um das Schaubild einer Funktion zu zeichnen, braucht ihr ein Koordinatensystem mit einer x-Achse (waagrecht) und einer y-Achse (senkrecht).

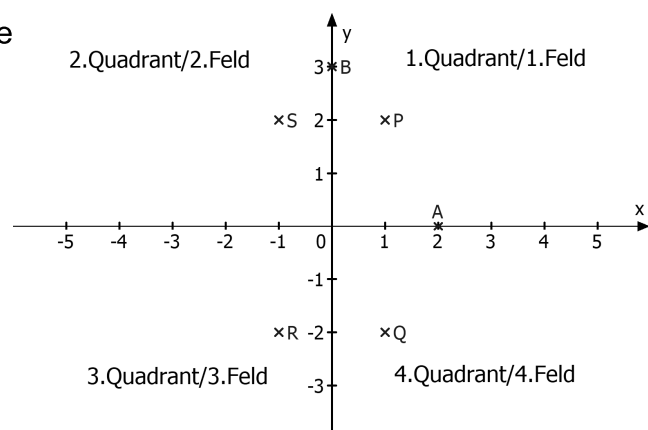
Ein Punkt wird durch zwei Koordinaten angegeben, zum Beispiel $P(1|2)$.

Hierbei ist 1 der x-Wert von P und 2 der y-Wert von P.

Quadranten/Felder

Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in 4 Quadranten/Felder auf:

$P(1|2)$ liegt im 1.Quadrant.
 $S(-1|2)$ liegt im 2.Quadrant.
 $R(-1|-2)$ liegt im 3.Quadrant.
 $Q(1|-2)$ liegt im 4.Quadrant.
 $A(2|0)$ liegt auf der x-Achse.
 $B(0|3)$ liegt auf der y-Achse.



Darstellungsform der Funktion $y = x^2 - x$

- **als Funktionsterm:** $f(x) = x^2 - x$

Hinweis: Wir verwenden ab jetzt die Schreibweise $f(x) = \dots$ statt $y = \dots$ (außer bei Geraden in Kapitel 2).

- **als Wertetabelle:**

x	-2	-1	0	1	2
y	6	2	0	0	2

Die x-Werte in der ersten Zeile der Tabelle sind vorgegeben.
Die y-Werte berechnet ihr durch Einsetzen der x-Werte in die Funktionsgleichung.

Beispiel für $x = -1$: $f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$

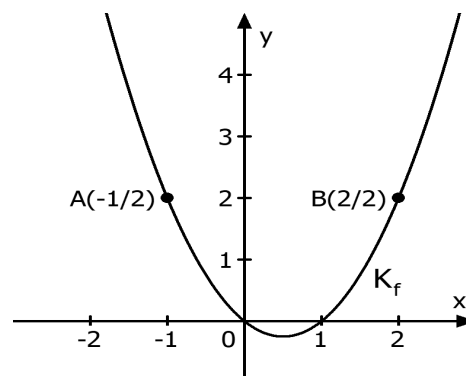
Beispiel für $x = 2$: $f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

Aus der Tabelle könnt ihr Punkte des Schaubilds ablesen, z.B. A(-1|2) oder B(2|2).

Euer Taschenrechner kann solche Wertetabellen automatisch erzeugen. Wie das geht, hängt vom Taschenrechnermodell ab. Wenn ihr nicht wisst, wie das geht, fragt am besten eure Lehrkraft oder recherchiert im Internet.

- **als Schaubild / Graph**

Das Schaubild einer Funktion f wird oft mit einem eigenen Großbuchstaben bezeichnet (z.B. K oder G_f). Ihr zeichnet es, indem ihr die Punkte aus der Wertetabelle eintragt und verbindet.



Der x-Wert eines Punktes wird auch als **Stelle** bezeichnet.

Der y-Wert eines Punktes wird auch als **Funktionswert** bezeichnet.

Erklärung der Schreibweise $f(a) = b$:

Der Ausdruck $f(-1) = 2$ sagt aus:

- 1.) Der Punkt A(-1|2) liegt auf dem Schaubild von f.
- 2.) Die Funktion f nimmt an der Stelle $x = -1$ den Funktionswert 2 an.

Zahlintervalle

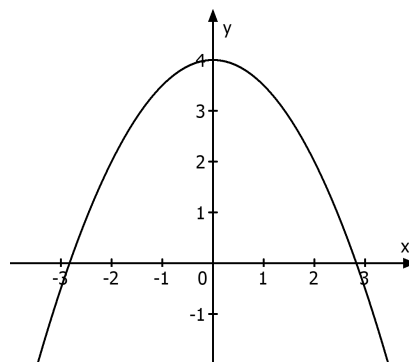
Zur Angabe von Zahlintervallen (z.B. für die Wertemenge einer Funktion) braucht ihr folgende Schreibweisen:

- $\mathbb{R}$ stellt die Menge der reellen Zahlen dar – dies sind alle Zahlen, die ihr kennt
- $[1;4] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$ ist das Intervall aller Zahlen von 1 bis 4 einschließlich der Randzahlen 1 und 4.
- $]1;4[= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$ ist das Intervall aller Zahlen von 1 bis 4 ohne die Randzahlen 1 und 4.
- $[1;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ sind alle Zahlen größer oder gleich 1
- $] -\infty;4] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$ sind alle Zahlen kleiner oder gleich 4

Anstatt der eckigen Klammern nach außen könnt ihr auch runde Klammern nutzen, also $]1;4[= (1;4)$. In diesem Buch verwenden wir die eckigen Klammern.

Beispiel 1.1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0,5x^2 + 4$. Das zugehörige Schaubild ist eine nach unten geöffnete Parabel.



Die Definitionsmenge der Funktion f ist $D_f = \mathbb{R}$, da ihr für die Variable x jede Zahl einsetzen dürft.

Beispiel: $f(-2) = -0,5 \cdot (-2)^2 + 4 = 2$

Aus dem Schaubild erkennt ihr: Der höchste Punkt der Parabel ist P(0|4). Der größte y-Wert ist also 4. Einen tiefsten Punkt gibt es nicht, da die Parabel beliebig weit nach unten verläuft.

Die Wertemenge der Funktion f ist $W_f =]-\infty;4]$.



FEHLER ERKENNEN – ERFOLG STEIGERN

Achtet auf die mathematische Fachsprache:

Richtig: „Das **Schaubild** von f verläuft durch den Punkt $P(2|3)$.“

Falsch: „Die Funktion f verläuft durch den Punkt $P(2|3)$.“

Begründung: Die Funktion ist eine mathematische Zuordnung und keine Kurve/Linie.

Richtig: „An der **Stelle** $x = 1$...“

Falsch: „Im Punkt $x = 1$...“

Begründung: Ein Punkt hat immer zwei Koordinaten.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1-1:

Formuliere mithilfe der Schreibweise $f(a) = b$:

- An der Stelle 4 hat die Funktion f den Funktionswert 6.
- Durch die Funktion f wird dem x -Wert 2 die Zahl -4 zugeordnet.
- Der Punkt $P(1|3)$ liegt auf dem Schaubild von f .
- Das Schaubild K_f von f schneidet die x -Achse in $x = 3$.
- Das Schaubild K_f von f schneidet die y -Achse auf der Höhe $y = -6$.

Aufgabe 1-2:

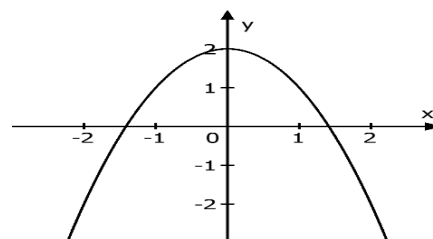
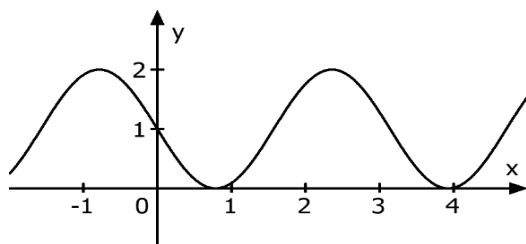
Formuliere die mathematische Aussage in eigenen Worten.

- $f(5) = 8$
- $f(3) = g(3)$
- $f(5) = f(2)$

Aufgabe 1-3:

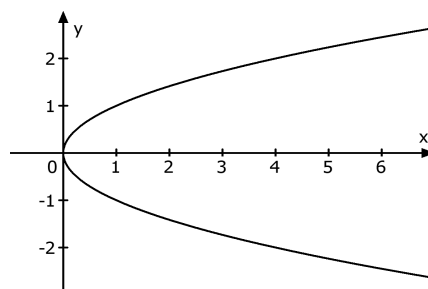
Wie lautet die Wertemenge der folgenden Funktionen?

Gib außerdem $f(0)$ an.



Aufgabe 1-4:

Warum kann die folgende Abbildung kein Schaubild einer Funktion sein?



2 Lineare Funktionen

2.1 Lösen linearer Gleichungen

Das Lösen linearer Gleichungen kennt ihr bereits aus der Mittelstufe.
Mit den folgenden Schritten könnt ihr eine lineare Gleichung lösen

- 1.) Klammern auflösen (Klammerregeln beachten)
- 2.) Terme auf beiden Seiten zusammenfassen
- 3.) x-Terme und Zahlen trennen und auf verschiedene Seiten bringen
- 4.) Durch die Zahl dividieren, die vor dem x steht.

Klammerregeln:

Auflösen einer **Plusklammer**:

Eine Plusklammer erkennt ihr daran, dass vor der Klammer ein Pluszeichen steht.
Die Vor- und Rechenzeichen in der Klammer werden beim Auflösen übernommen.

$$4 + (x - 6) = 4 + x - 6 \qquad 4 + (-x + 6) = 4 - x + 6$$

Auflösen einer **Malklammer**:

Eine Malklammer erkennt ihr daran, dass an die Klammer etwas anmultipliziert ist.

Das Auflösen einer Malklammer nennt man „ausmultiplizieren“.

$$3 \cdot (x - 5) = 3x - 15 \qquad -4 \cdot (3x + 2) = -12x - 8$$

Auflösen einer **Minusklammer**:

Eine Minusklammer erkennt ihr daran, dass vor der Klammer ein Minuszeichen steht.

Um die Klammer aufzulösen, wird die Klammer mit der Zahl -1 ausmultipliziert.

$$4 - (x - 6) = 4 - 1 \cdot (x - 6) = 4 - x + 6 \qquad 4 - (-x + 6) = 4 - 1 \cdot (-x + 6) = 4 + x - 6$$

Beispiel 2.1:

Löse die Gleichung $2 \cdot (x + 4) + (x - 2) = 2x - 5 - (x + 1)$

1. Klammer auflösen: $2x + 8 + x - 2 = 2x - 5 - x - 1$
2. Terme auf beiden Seiten zusammenfassen: $3x + 6 = x - 6 \quad | -x - 6$
3. x-Terme und Zahlen trennen und auf verschiedene Seiten bringen: $2x = -12 \quad |:2$
4. Durch die Zahl dividieren, die vor dem x steht: $x = -6$

Übungsaufgaben

Aufgabe 2-1:

Löse die folgenden Gleichungen:

- a) $20x - 3 \cdot (5x + 7) = -2 \cdot (3 - x)$
- b) $5x - (8 + 9x) = 12$
- c) $4x + (-x - 2) = 5(x + 1) - (4x + 1)$

2.2 Schaubild einer linearen Funktion

Das Schaubild einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Eine lineare Funktion besitzt die Bauart $y = m \cdot x + b$.

b = Schnitthöhe der Gerade auf der y-Achse = y-Achsenabschnitt

m = Steigung der Gerade

Beispiel 2.2:

- a) $y = -2x + 4$: Steigung $m = -2$ und y-Achsenabschnitt $b = 4$.
- b) $y = x$: Steigung $m = 1$ und y-Achsenabschnitt $b = 0$
- c) $y = 6$: Steigung $m = 0$ und y-Achsenabschnitt $b = 6$

Die Steigung einer Gerade könnt ihr grafisch mit einem Steigungsdreieck bestimmen.

$$\text{Steigung der Gerade} = m = \frac{\text{senkrechte Strecke}}{\text{waagrechte Strecke}}$$

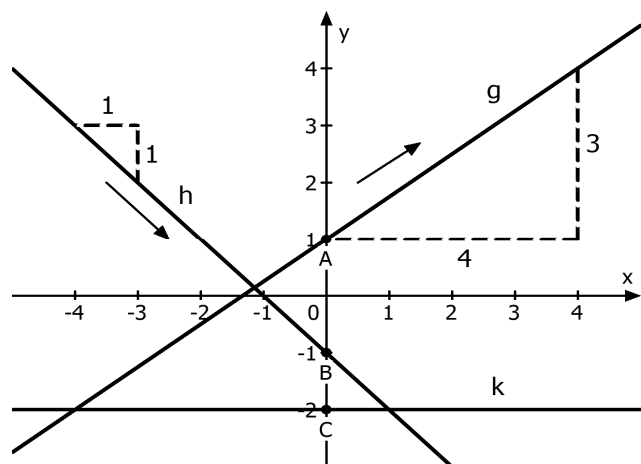
Gerade g: $m = \frac{3}{4}$

(positiv, da Gerade aufwärts verläuft)

Gerade h: $m = -\frac{1}{1} = -1$

(negativ, da Gerade abwärts verläuft)

Gerade k: $m = 0$ (waagrechte Gerade).



Vorgehen beim Zeichnen des Schaubildes (Gerade) von $y = mx + b$

- 1.) Markiere im Koordinatensystem den Punkt $(0|b)$ auf der y-Achse.
- 2.) Falls die Steigung m keine Bruchzahl ist, schreibe sie als Bruchzahl um.
(z.B. aus $m = 3$ wird $m = \frac{3}{1}$)
- 3.) Gehe vom Punkt $(0|b)$ auf der y-Achse mit dem **Nenner** der Bruchzahl **nach rechts** und mit dem **Zähler** nach **oben** (positive Steigung) oder nach **unten** (bei negativer Steigung) und markiere den Zielpunkt.
- 4.) Verbinde den Punkt $P(0|b)$ und den Zielpunkt zu einer Geraden.

Beispiel 2.3:

Zeichne die Schaubilder der Funktionen $g: y = -\frac{2}{3}x - 1$ und $h: y = 2x + 1$.

Gerade g:

Es gilt $b = -1$.

Schnittpunkt mit der y-Achse $B(0|-1)$

$m = -\frac{2}{3}$: Steigungsdreieck von B aus:

3 nach rechts und 2 nach unten

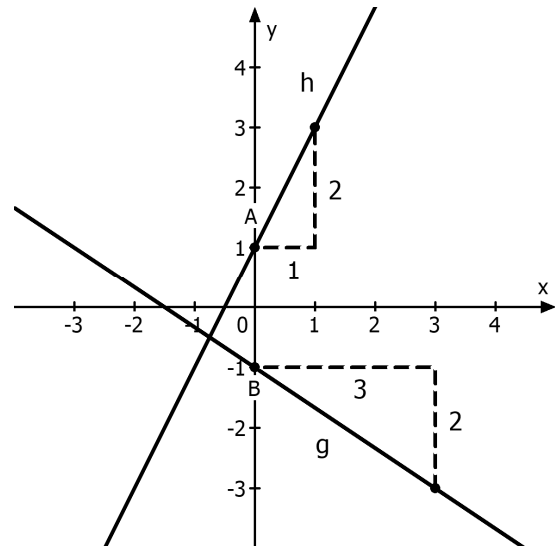
Gerade h:

Es gilt $b = 1$.

Schnittpunkt mit der y-Achse $A(0|1)$

$m = 2 = \frac{2}{1}$: Steigungsdreieck von A aus:

1 nach rechts und 2 nach oben



Übungsaufgaben

Aufgabe 2-2:

Zeichne die Schaubilder der Funktionen g und h in ein Koordinatensystem ein.

a) $g: y = -\frac{3}{2}x - 2$; $h: y = 1 + 2x$ b) $g: y = \frac{3}{5}x - 3$; $h: y = 2 - x$

- c) g : Steigung der Geraden ist $m = 0$ und der y-Achsenabschnitt ist $b = -1$
 h : Steigung der Geraden ist $m = 1$ und der y-Achsenabschnitt ist $b = 0$

2.3 Punktprobe und Schnittpunkte

2.3.1 Punktprobe

Mit Hilfe einer Punktprobe könnt ihr rechnerisch prüfen, ob ein gegebener Punkt auf dem Schaubild einer Funktion liegt.

Hierzu setzt ihr den x-Wert und y-Wert des Punktes in die Funktionsgleichung ein.

Ergibt sich eine wahre Aussage, liegt der Punkt auf dem Schaubild.

Ergibt sich eine falsche Aussage, liegt der Punkt nicht auf dem Schaubild.

.....

Beispiel 2.4:

Gegeben ist die Geradengleichung $y = 0,2x + 1$.

Liegt der Punkt $P(7|2,4)$ auf der Gerade?

Einsetzen von $x = 7$ und $y = 2,4$ in den Funktionsterm: $2,4 = 0,2 \cdot 7 + 1$

Es entsteht eine wahre Aussage $2,4 = 2,4$, somit liegt P auf der Gerade.

Liegt der Punkt $R(-7|0)$ auf der Gerade?

Einsetzen von $x = -7$ und $y = 0$ in den Funktionsterm: $0 = 0,2 \cdot (-7) + 1$

Es entsteht eine falsche Aussage $0 = -0,4$ und somit liegt R nicht auf der Gerade.

.....

Ist von einem Punkt nur eine Koordinate gegeben und soll der Punkt auf dem Schaubild einer Funktion liegen, müsst ihr die bekannte Koordinate des Punktes in den Funktionsterm einsetzen und die unbekannte Koordinate berechnen.

.....

Beispiel 2.5:

a) Berechne den y-Wert von Punkt $P(4|y)$, der auf der Geraden $y = 3x - 1$ liegt.

Einsetzen von $x = 4$: $y = 3 \cdot 4 - 1 = 11$ und damit $P(4|11)$

b) Berechne den x-Wert von Punkt $Q(x|5)$, der auf der Geraden $y = 2x - 3$ liegt.

Einsetzen von $y = 5$: $5 = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ und damit $Q(4|5)$

.....

2.3.2 Schnittpunkte einer Gerade mit den Koordinatenachsen / Nullstelle

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Setze in die Geradengleichung für $x = 0$ ein und berechne den y-Wert.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Setze in die Geradengleichung für $y = 0$ ein und berechne den x-Wert.

Nullstelle:

Die Nullstelle ist der x-Wert des Schnittpunktes mit der x-Achse.

Beispiel 2.6:

Berechne die Schnittpunkte des Schaubildes von $y = 2x - 1$ mit den Koordinatenachsen und gib die Nullstelle an.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Setze $x = 0$: $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

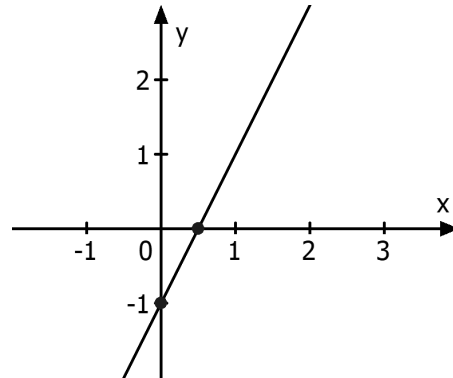
Schnittpunkt $M(0|-1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Setze $y = 0$: $0 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 0,5$

Schnittpunkt $N(0,5|0)$

Nullstelle: $x = 0,5$

**2.3.3 Schnittpunkt von zwei Geraden**

Mit den folgenden Schritten berechnet ihr den Schnittpunkt zweier Geraden.

- 1.) Gleichungen der Geraden gleichsetzen und die entstehende Gleichung lösen.
Damit berechnet ihr die **Schnittstelle** (x-Wert des Schnittpunktes).
- 2.) Um den y-Wert des Schnittpunktes zu erhalten, setzt ihr anschließend die Schnittstelle in eine der Geradengleichungen ein.

Beispiel 2.7:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden $g: y = x + 1$ und $h: y = -2x + 4$.

1.) Gleichsetzen der Geraden:

$$x + 1 = -2x + 4$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3$$

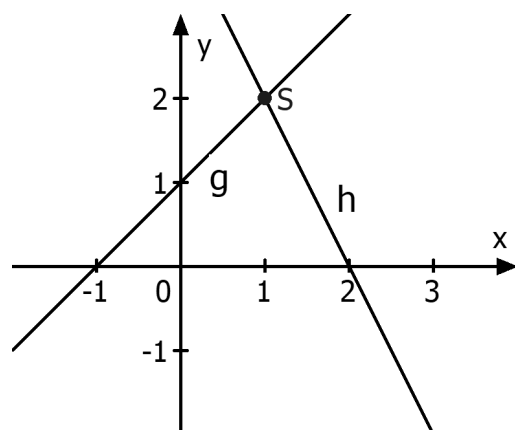
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Schnittstelle: $x = 1$.

2.) $x = 1$ in eine der Geradengleichungen einsetzen:

$$y = 1 + 1 = 2$$

Schnittpunkt der Geraden: $S(1|2)$



Übungsaufgaben

Aufgabe 2-3:

Berechne die Schnittpunkte der Gerade mit den Koordinatenachsen:

a) $y = -4x - 3,5$ b) $y = 2x - \frac{7}{3}$

Aufgabe 2-4:

Bestimme sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch die Schnittpunkte der beiden Geraden.

a) $g: y = -3x + 1$ und $h: y = -x - 1$ b) $g: y = \frac{1}{2}x + 2$ und $h: y = x + 3$

2.4 Aufstellen einer linearen Funktion (Geradengleichung)

Beim Aufstellen einer Geradengleichung lautet der Ansatz: $y = m \cdot x + b$

Es gibt 3 mögliche Vorgaben, um eine Geradengleichung aufzustellen:

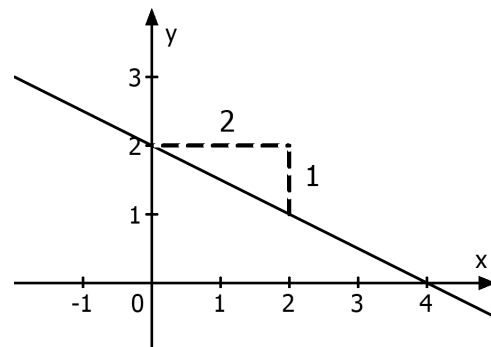
1. Möglichkeit: Gegeben ist das Schaubild der Gerade

- 1.) Stelle die allgemeine Geradengleichung auf: $y = m \cdot x + b$
- 2.) Lies den Wert von b ab (Höhe, bei der die Gerade die y -Achse schneidet)
- 3.) Lies den Wert von m ab (Einzeichnen eines Steigungsdreiecks und Steigungsberechnung gemäß Beispiel 2.3)
- 4.) Setze die Werte von m und b in die allgemeine Geradengleichung ein

Beispiel 2.8:

Für die Gerade gilt $b = 2$ und $m = -\frac{1}{2}$.

Gleichung der Gerade: $y = -\frac{1}{2}x + 2$



2. Möglichkeit: Gegeben ist die Steigung m und ein Punkt P der Gerade

- 1.) Stelle die allgemeine Geradengleichung auf: $y = m \cdot x + b$
- 2.) Setze die gegebene Steigung m in die Geradengleichung ein.
- 3.) Setze die Koordinaten des Punktes für x und y ein und berechne b .
- 4.) Setze die Werte von m und b in die allgemeine Geradengleichung ein.

Beispiel 2.9:

Stelle die Gleichung der Gerade auf, die die Steigung $m = -3$ besitzt und durch den Punkt $A(3|4)$ verläuft.

- 1.) Allgemeine Geradengleichung: $y = m \cdot x + b$
 - 2.) $m = -3$ in die Geradengleichung einsetzen: $y = -3x + b$
 - 3.) $x = 3$ und $y = 4$ einsetzen: $4 = -3 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 13$
 - 4.) Gleichung der Gerade: $y = -3x + 13$
-

3. Möglichkeit: Gegeben sind zwei Punkte P und Q der Gerade

- 1.) Stelle die allgemeine Geradengleichung auf: $y = m \cdot x + b$
 - 2.) Berechne die Steigung der Gerade mit der Formel $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ und setze die Steigung m in die Geradengleichung ein.
 - 3.) Setze die Koordinaten von einem der beiden Punkte für x und y in die Geradengleichung ein und berechne b .
 - 4.) Setze die Werte von m und b in die allgemeine Geradengleichung ein.
-

Beispiel 2.10:

Stelle die Gleichung der linearen Funktion auf, deren Schaubild durch die Punkte $P(1|1)$ und $Q(-2|-5)$ verläuft.

- 1.) Ansatz der Geradengleichung: $y = m \cdot x + b$
 - 2.) $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-5 - 1}{-2 - 1} = \frac{-6}{-3} = 2$
Einsetzen in die Geradengleichung: $y = 2x + b$
 - 3.) Koordinaten von Q einsetzen: $-5 = 2 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = -1$
 - 4.) Gleichung der Gerade: $y = 2x - 1$
-

Es gibt zwei besondere Geraden, die eine spezielle Bezeichnung besitzen:

Die Gerade $y = x$ nennt man **1. Winkelhalbierende**.
Die Gerade $y = -x$ nennt man **2. Winkelhalbierende**.

Übungsaufgaben

Aufgabe 2-5:

Bestimme die Gleichung der Geraden g mit folgenden Eigenschaften:

- g hat die Steigung $m = 3$ und verläuft durch $A(1|1,5)$.
- g verläuft durch $A(1|-2)$ und $B(-2|10)$.

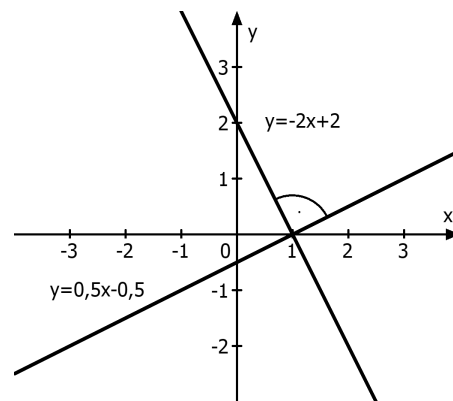
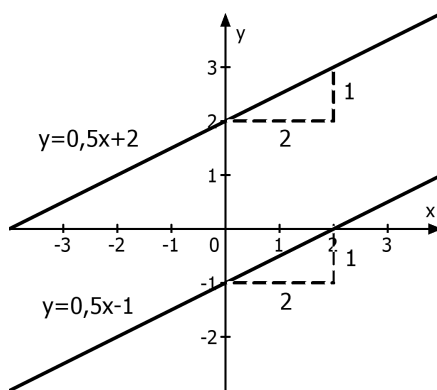
2.5 Parallele und orthogonale Geraden

Zwei Geraden g und h sind **parallel**, wenn für ihre Steigungen gilt: $m_g = m_h$

Zwei Geraden g und h stehen **orthogonal (senkrecht)** aufeinander, wenn für ihre Steigungen gilt: $m_g \cdot m_h = -1$

Linke Abbildung: Die Geraden sind parallel und haben die gleiche Steigung $m = 0,5$.

Rechte Abbildung: Die Geraden stehen orthogonal (senkrecht) aufeinander, da ihre Steigungen miteinander multipliziert -1 ergeben: $m_g \cdot m_h = -2 \cdot 0,5 = -1$



Beispiel 2.11:

- Stelle die Gleichung der Gerade g auf, die durch den Punkt $P(2|3)$ verläuft und parallel ist zur Geraden h mit der Gleichung $y = -x - 4$.

Ansatz: für die Geradengleichung: $y = m \cdot x + b$

Es gilt $m_g = m_h = -1$, da die Geraden zueinander parallel sind.

Somit lautet der Ansatz $y = -1x + b$

Einsetzen des Punktes $P(2|3)$: $3 = -1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 5$

Gleichung der Gerade: $y = -x + 5$

- b) Stelle die Gleichung der Gerade g auf, die orthogonal ist zur Geraden h mit der Gleichung $y = -\frac{1}{5}x + 1$ und die durch den Punkt P(1|2) verläuft.

Ansatz: $y = m \cdot x + b$

Es gilt $m_g \cdot m_h = -1$, da die Geraden g und h orthogonal zueinander sind.

$$m_g \cdot m_h = -1 \Rightarrow m_g = \frac{-1}{-\frac{1}{5}} = 5$$

Somit lautet der Ansatz $y = 5x + b$

Einsetzen des Punktes P(1|2): $2 = 5 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -3$

Gleichung der Gerade: $y = 5x - 3$

Übungsaufgaben

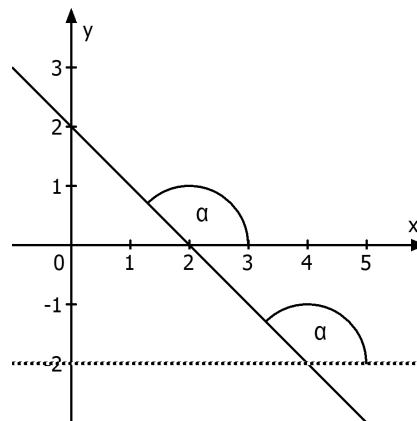
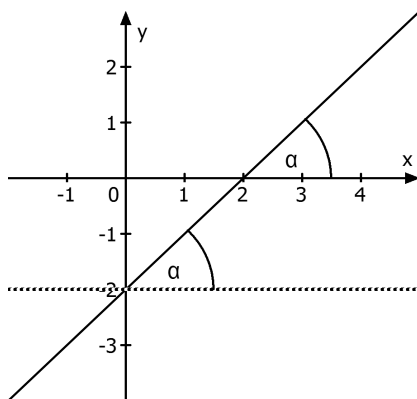
Aufgabe 2-6:

Bestimme die Gleichung der linearen Funktion:

- Die Gerade verläuft durch A(-6|1) und ist parallel zur Gerade $y = x$.
- Die Gerade verläuft durch A(2|3) und ist orthogonal zur Geraden h mit der Gleichung $y = 2x + 4$.

2.6 Steigungswinkel einer Geraden

Der **Steigungswinkel** einer Geraden ist der Winkel, den die Gerade mit der x-Achse einschließt. Der Winkel wird von der x-Achse aus *entgegen dem Uhrzeigersinn* gemessen.



Der Steigungswinkel α , den eine Gerade mit der x-Achse einschließt, wird mit der Steigung m der Geraden berechnet:

$$m = \tan(\alpha) \quad \text{wobei } 0 \leq \alpha < 180^\circ \text{ gilt}$$

Ist die Steigung positiv, dann ist $\alpha < 90^\circ$ (linke Abbildung)

Ist die Steigung negativ, dann ist $\alpha > 90^\circ$ (rechte Abbildung)