

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

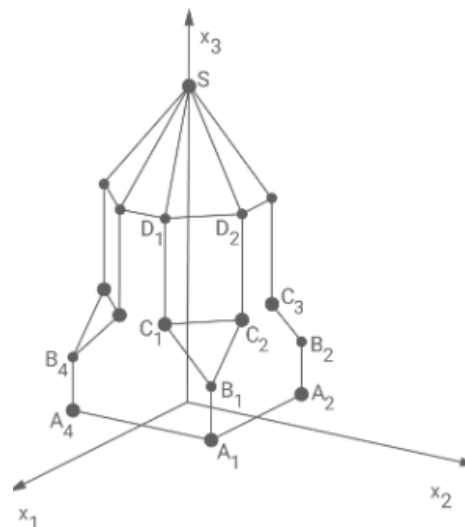
3 Lineare Algebra (a) 5 BE b) 5 BE c) 3 BE d) 3 BE e) 4 BE)

Ein Kirchturm hat einen quadratischen Grundriss.

In einer gewissen Höhe geht der Kirchturm in ein achteckiges Prisma über.

Das Dach hat die Form einer achteckigen Pyramide.

Der obere Teil des Kirchturms ist in der Abbildung dargestellt. Der quadratische Grundriss des Turms hat eine Seitenlänge von 6 Metern.



Die Punkte $A_1(3|3|0)$, $A_2(-3|3|0)$, ... liegen in der x_1x_2 -Ebene.

Folgende weitere Punkte sind gegeben:

$$B_1(3|3|2), B_2(-3|3|2)$$

$$C_1(3|1|4), C_2(1|3|4), C_3(-1|3|4)$$

$$D_1(3|1|8), D_2(1|3|8), D_3(-1|3|8)$$

Alle Punkte B... haben die x_3 -Koordinate 2.

Alle Punkte C... haben die x_3 -Koordinate 4.

Alle Punkte D... haben die x_3 -Koordinate 8.

Eine Längeneinheit entspricht 1 Meter.

- a) Zeichnen Sie das Quadrat $A_1A_2A_3A_4$ in ein zweidimensionales x_1x_2 -Koordinatensystem ein.

Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die orthogonale Projektionen der Punkte C_1 und C_2 ein.

- b) Zeigen Sie, dass das Dreieck $C_1B_1C_2$ gleichseitig ist.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $C_1B_1C_2$.

Die Spitze S liegt auf der x_3 -Achse.

- c) Vier der acht Dreiecksflächen des Daches sind parallel zu den jeweils unterhalb liegenden Dreiecksflächen. Ermitteln Sie die Koordinaten der Spitze S.

- d) Der Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist M. Der Mittelpunkt der Strecke D_2D_3 ist N. Begründen Sie, dass die Strecken MS und NS unterschiedliche Neigungswinkel haben.

- e) Der Kirchplatz liegt in einer zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene.
Die Spitze S befindet sich 30 m über dem Kirchplatz.

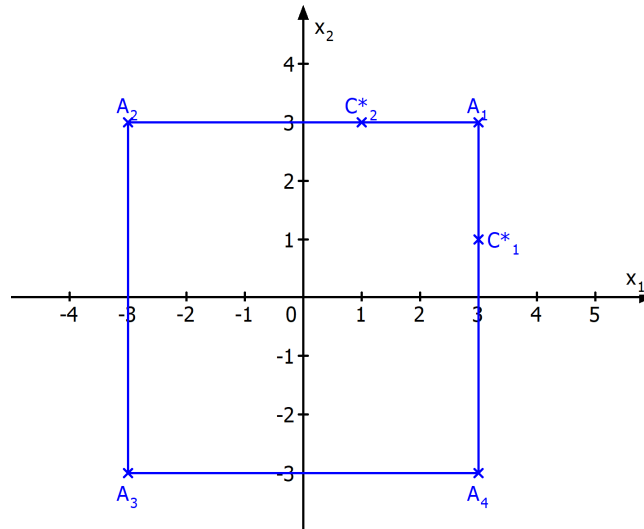
An einem Sommertag scheint die Sonne in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Dadurch wirft sie einen Schatten von S auf den Kirchplatz.
Berechnen Sie, wie groß der Abstand der Spitze S von deren Schattenpunkt ist.

Lösungen

3 Lineare Algebra

- a) Die orthogonalen Projektionen der Punkte C_1 und C_2 sind die Punkte $C_1^* (3|1|0)$ und $C_2^* (1|3|0)$.



- b) Berechnung der Länge der Dreiecksseiten:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{B_1C_1}| &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} & |\overrightarrow{B_1C_2}| &= \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\ |\overrightarrow{C_1C_2}| &= \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \end{aligned}$$

Da alle Seiten gleich lang sind, ist das Dreieck gleichseitig.

Flächeninhalt des Dreiecks:

Der Mittelpunkt M der Dreiecksseite $\overline{C_1C_2}$ hat die Koordinaten $M(2|2|4)$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{C_1C_2}| \cdot |\overrightarrow{MB_1}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$$

- c) Die Ebene, in dem das Dreieck $B_1C_1C_2$ liegt ist parallel zur Ebene, in dem das Dreieck D_1D_2S liegt.

Berechnung des Normalenvektors der Ebene durch B_1, C_1, C_2 :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ebene H durch D_1, D_2 und S hat denselben Normalenvektor.

Ansatz für die Koordinatengleichung von H: $x_1 + x_2 + x_3 = d$

Einsetzen des Punktes $D_1(3 | 1 | 8)$ liefert $d = 12$.

$$H: x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

Der Schnittpunkt der Ebene H mit der x_3 -Achse lautet $S(0|0|12)$.

d) Der Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist $M(2|2|8)$.

Der Mittelpunkt der Strecke D_2D_3 ist $N(0|3|8)$.

Die Punkte M und N haben dieselbe x_3 -Koordinate 8.

Der Abstand von M von der x_3 -Achse entspricht dem Abstand von M zum Punkt

$$Q(0|0|8). \text{ Dieser ist } |\overline{MQ}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8}.$$

Der Abstand von N von der x_3 -Achse entspricht dem Abstand von N zum Punkt

$$Q(0|0|8). \text{ Dieser ist } |\overline{NQ}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3.$$

Da der Punkt M näher an der x_3 -Achse liegt, ist die Strecke von M zu S steiler als die Strecke von N zu S.

Damit sind die Neigungswinkel unterschiedlich.

e) Aufstellen der Geraden, die dem Sonnenstrahl durch die Spitze S entspricht:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da die Spitze $S(0|0|12)$ 30 m oberhalb des Kirchplatzes liegt, liegt der Kirchplatz in der Ebene F: $x_3 = -18$

$$\text{Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene F: } 12 - 4s = -18 \Leftrightarrow s = 7,5$$

Einsetzen von $s = 7,5$ in g ergibt den Schattenpunkt $S^*(22,5|15|-18)$.

$$\text{Abstand von S zu } S^*: |\overrightarrow{SS^*}| = \left| \begin{pmatrix} 22,5 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{22,5^2 + 15^2 + (-30)^2} \approx 40,4 \text{ m}$$