

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra (a) 2 BE b) 3 BE c) 5 BE d) 4 BE e) 6 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-3|-2|5)$, $B(1|-2|3)$, $C(9|6|7)$ und $D(5|6|9)$.

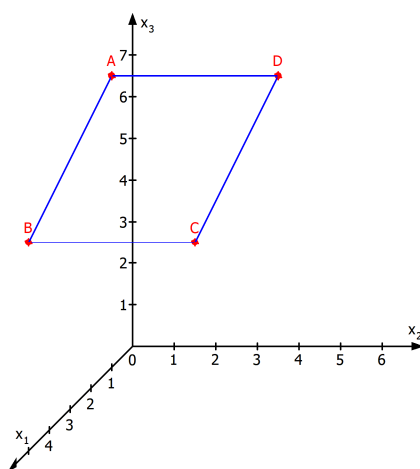
- a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
- b) Zeichnen Sie das Parallelogramm ABCD in ein dreidimensionales Koordinatensystem.
- c) Weisen Sie nach, dass die x_3 -Achse das Parallelogramm ABCD schneidet.
- d) Die Gerade g verläuft parallel zur x_3 -Achse durch Punkt C.
Die Gerade h verläuft senkrecht zum Parallelogramm durch Punkt C.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die beiden Geraden schneiden.
- e) Eine Ebene F ist parallel zur x_1x_3 -Ebene und teilt das Parallelogramm in zwei Teilflächen.
 - Begründen Sie, dass es sich bei beiden Teilflächen wieder um Parallelogramme handelt.
 - Das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen beträgt 1:2.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Ebene F mit der Seite BC.
Begründen Sie ihr Vorgehen.

Lösungen**3 Lineare Algebra**

a) Ein Parallelogramm liegt vor, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ -2 - (-2) \\ 3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 9 - 5 \\ 6 - 6 \\ 7 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Zeichnung:



c) Aufstellen der Ebene E, in der das Parallelogramm ABCD liegt:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von E mit der x_3 -Achse:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{2. Zeile: } 0 = -2 + 8s \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}$$

$$\text{1. Zeile: } 0 = -3 + 4 \cdot r + 8 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$$

Da die Spannvektoren der Ebene den Seiten $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ des Parallelogramms entsprechen, liegt ein Punkt in dem Parallelogramm, wenn $0 < s < 1$ und $0 < r < 1$ gilt.

Da dies für den Schnitt der Fall ist wegen $r = s = \frac{1}{4}$ liegt der Schnittpunkt von E mit der x_3 -Achse innerhalb des Parallelogramms.

- d) Für die Berechnung des Schnittwinkels werden die Richtungsvektoren der beiden Geraden benötigt.

Richtungsvektor von g: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor von h = Normalenvektor von E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -32 \\ 32 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Winkels:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,2^\circ$$

- e) Die Parallelogrammseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ liegen parallel zur x_1x_3 -Ebene, da die x_2 -Koordinaten der Vektoren $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ den Wert 0 haben.

Damit sind die beiden Teilflächen wieder Parallelogramme.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD berechnet sich mit der Formel

$$A = \overline{BC} \cdot h_{\text{Parallelogramm}}$$

Der Flächeninhalt der linken Parallelogrammteilfläche (mit dem rechten unteren Eckpunkt P auf der Strecke BC) berechnet sich mit der Formel

$$A = \overline{BP} \cdot h_{\text{Parallelogramm}}$$

Das Verhältnis 1:2 bedeutet, dass der Inhalt der linken Teilfläche $\frac{1}{3}$ des gesamten Flächeninhalts beträgt.

Da die Höhen des Parallelogramms ABCD und des linken Teilfläche gleich groß sind, muss daher gelten: $\frac{1}{3} \cdot \overline{BC} = \overline{BP}$

Berechnung des Punktes P mit Hilfe seines Ortsvektors:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 2/3 \\ 13/3 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes P der Ebene E mit der Seite BC lauten

$$P\left(\frac{11}{3} \mid \frac{2}{3} \mid \frac{13}{3}\right).$$