# Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
# Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)

# Baden-Württemberg

## Teil B – Analysis Aufgabensatz 2

**Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe**

**berufliche Gymnasien**

Alexander Schwarz

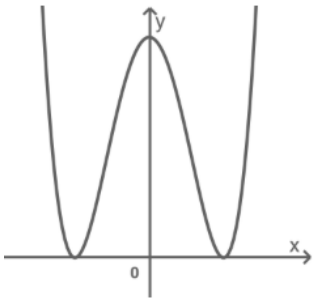
www.mathe-aufgaben.com

# 1 Analysis

## 1.1 (a) 3 BE b) 1 BE c) 3 BE d) 5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g durch $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$.
Der Graph von g ist $K_g$.

a) Nenne drei Argumente, warum es sich beim dargestellten Graphen um $K_g$ handeln kann.




Der Graph $K_f$ der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$ geht aus $K_g$ durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a hervor.

b) Gib den Wert von a an.

c) Bestimme eine Gleichung der Parabel (zweiten Grades), die durch alle Extrempunkte von $K_f$ verläuft.

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{9}{8}$ schließt mit dem Graphen $K_f$ drei Teilflächen ein. Zeige, dass man diese Gerade nach unten verschieben muss, damit die eingeschlossenen Teilflächen alle denselben Flächeninhalt haben.

## 1.2 (a) 3 BE b) 3 BE c) 5 BE)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot \cos(x) + 4$.
Ihr Graph ist $K_h$.

a) Zeichne $K_h$ im Bereich $-\pi \le x \le \pi$.

b) Zeige, dass die Gerade t mit der Gleichung $y = -4x + 2\pi + 4$ eine Tangente an den Graphen $K_h$ im Punkt $P(\frac{\pi}{2} | 4)$ ist.

c) Die Tangente im Kurvenpunkt P(u|h(u)), $0 \le u \le \pi$, schneidet die y-Achse im Punkt S.
Bestimme denjenigen Wert, den die y-Koordinate von S maximal annehmen kann.

## 1.3 (a) 3 BE b) 4 BE)

Ein Notizzettel hat die Maße 9 x 9 cm. Von diesem Notizzettel wird nun immer wieder ein Stück abgeschnitten, so dass sich der Flächeninhalt A des verbleibenden Stücks mit jedem Schnitt halbiert.

a) Zeige, dass sich der nach n Schnitten verbleibende Flächeninhalt des Notizzettels in cm² durch die Funktion A mit

$$A(n) = 81 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot n}; \; n \in \mathbb{N}$$

beschreiben lässt.

b) Berechne, wie oft man ein Stück des Notizzettels abschneiden muss, bis das verbleibende Stück erstmals einen Flächeninhalt von weniger als einem hundertstel Quadratzentimeter hat.

**Lösungen**

## 1 Analysis

### 1.1

a)

- $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$ nimmt keine negativen Werte an und der Graph besitzt keine negativen y-Werte
- $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$ hat zwei doppelte Nullstellen und der Graph besitzt zwei doppelte Nullstellen
- $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2 = x^4 + ...$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 4 und der Graph ist das Schaubild einer Polynomfunktion vom Grad 4
- $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2 = \left((x+2)(x-2)\right)^2 = \left(x^2-4\right)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$
  Die Polynomfunktion besitzt nur gerade Exponenten bei x, somit ist der Graph symmetrisch zur y-Achse.

b) Wegen $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2 = \left((x+2)(x-2)\right)^2 = \left(x^2-4\right)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$
gilt: $f(x) = \frac{1}{8} \cdot g(x)$ , also ist $a = \frac{1}{8}$.

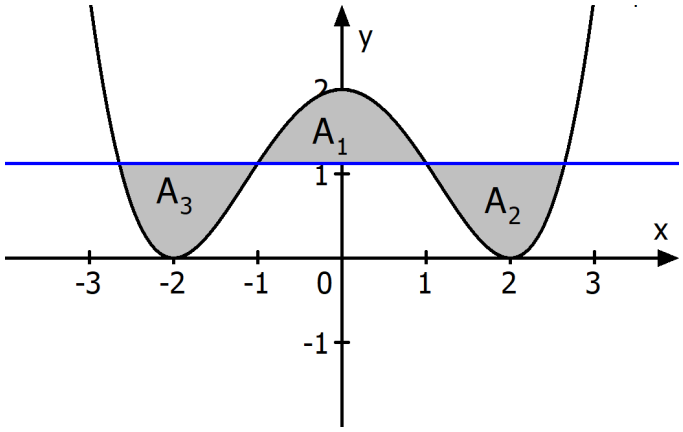
c) Das Schaubild von g(x) besitzt die doppelten Nullstellen x = -2 und x = 2.
Laut der Abbildung sind dort die beiden Tiefpunkte $T_1(-2\,|\,0)$ und $T_2(2\,|\,0)$.
Außerdem besitzt das Schaubild von g(x) laut der Abbildung einen Hochpunkt bei x = 0.

Da sich das Schaubild von f aus dem Schaubild von g durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $a = \frac{1}{8}$ ergibt, sind die Tiefpunkte des Schaubildes von f ebenfalls $T_1(-2\,|\,0)$ und $T_2(2\,|\,0)$. Der Hochpunkt des Schaubildes von f hat die Koordinaten $H(0\,|\,f(0))$, also H(0|2).

Da die gesuchte Parabel durch $T_1(-2\,|\,0)$ und $T_2(2\,|\,0)$ verläuft, ist sie symmetrisch zur y-Achse mit dem Scheitelpunkt H(0|2).

Ansatz der Parabelgleichung: $p(x) = bx^2 + 2$.
Wegen p(2) = 0 folgt $0 = 4b + 2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$
Gleichung der Parabel: $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

d) Skizze:




Zur Berechnung der Flächeninhalte zwischen der waagrechten Gerade $y = \frac{9}{8}$ und $K_f$ werden die Schnittstellen der Schaubilder benötigt.

$$\frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2 = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - x^2 + \frac{7}{8} = 0 \quad |\cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \quad \text{Substitution: } u = x^2$$

$$u^2 - 8u + 7 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \quad \text{also } u_1 = 7 \text{ und } u_2 = 1$$

Rücksubstitution: $x^2 = 7 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$

$x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$

$$A_1 = \int_{-1}^{1}(f(x)dx) = \left[\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{8}x\right]_{-1}^{1} = \frac{17}{30} - (-\frac{17}{30}) \approx 1{,}13$$

$$A_2 = \int_{1}^{\sqrt{7}}\left(\frac{9}{8} - f(x)dx\right) = \left[\frac{9}{8}x - (\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2x)\right]_{1}^{\sqrt{7}} = \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{8}x\right]_{1}^{\sqrt{7}}$$

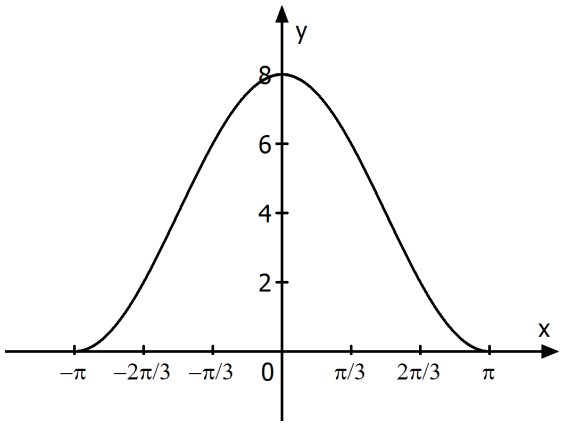
$$\approx 0{,}62 - (-\frac{17}{30}) \approx 1{,}19$$

Wegen der Symmetrie des Graphen von f gilt $A_2 = A_3 \approx 1{,}18$.

Da die Fläche oberhalb der Geraden kleiner ist als die beiden Flächen unterhalb der Geraden, muss die Gerade nach unten verschoben werden, damit alle Flächen gleich groß sind.

**1.2**

a) Die Amplitude der Funktion ist a = 4 und die waagrechte Mittellinie befindet sich auf der Höhe d = 4.




b) Es gilt $h'(x) = -4 \cdot \sin(x)$.

Steigung im Punkt P: $h'(\frac{\pi}{2}) = -4 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = -4$
Die Gerade t hat ebenfalls die Steigung m = -4.

Einsetzen des Punktes $P(\frac{\pi}{2} \mid 4)$ in die Geradengleichung:

$4 = -4 \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi + 4$
$\Leftrightarrow 4 = 4$

Aufgrund der wahren Aussage liegt P auf der Geraden t.
Somit ist t eine Tangente an den Graphen von h im Punkt P.

c) Allgemeine Tangentengleichung an der Stelle x = u:

$y = h'(u) \cdot (x - u) + h(u)$

Mit $h(u) = 4\cos(u) + 4$ und $h'(u) = -4\sin(u)$ folgt:

$y = -4\sin(u) \cdot (x - u) + 4\cos(u) + 4$

$y = -4\sin(u) \cdot x + 4u \cdot \sin(u) + 4\cos(u) + 4$

Der y-Achsenabschnitt $c(u) = 4u \cdot \sin(u) + 4\cos(u) + 4$ soll maximal werden.

Ableitung von c(u) mit der Produktregel:
$c'(u) = 4\sin(u) + 4u\cos(u) - 4\sin(u) = 4u \cdot \cos(u)$
$c''(u) = 4\cos(u) - 4u\sin(u)$

Hinreichende Bedingung für Maximumstelle: $c'(u) = 0$ und $c''(u) < 0$

$c'(u) = 0:\ 4u \cdot \cos(u) = 0$ liefert mit dem Satz vom Nullprodukt u = 0 und $u = \frac{\pi}{2}$.

$c''(0) = 4 > 0$ , also Minimumstelle

$c''(\frac{\pi}{2}) = -2\pi < 0$ , also Maximumstelle

Es gilt $c(\frac{\pi}{2}) = 2\pi + 4 \approx 10{,}28$

Überprüfung des Randwerts u = 0: Wegen c(0) = 8 < 10,28 besitzt S den maximalen y-Wert y=10,28.

**1.3**

a) Es gilt A(0) = 81.
Da sich der Flächeninhalt mit jedem Schnitt halbiert, gilt:

$A(n) = 81 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Es gilt $a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n \cdot \ln(a)}$ (Potenz- und Logarithmengesetz)

Daraus folgt $A(n) = 81 \cdot e^{n \cdot \ln(\frac{1}{2})} = 81 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2}) \cdot n}$ was zu zeigen war.

b) $81 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2}) \cdot n} < \frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow e^{\ln(\frac{1}{2}) \cdot n} < \frac{1}{8100} \quad | \ln$

$\Leftrightarrow \ln(\frac{1}{2}) \cdot n < \ln\left(\frac{1}{8100}\right) \quad | : \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow n > 12{,}98$

Hinweis: Da $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ist dreht sich das Ungleichheitszeichen im letzten Schritt um.

Es muss mindestens 13-mal ein Stück des Notizzettels abgeschnitten werden.