

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

1 Analysis

(a) 2 BE b) 3 BE c) 4 BE d) 3 BE e) 6 BE f) 5 BE g) 5 BE)

Der Graph K_g einer in $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktion g schneidet die y -Achse im Punkt $S_y(0|1)$. In diesem Punkt hat K_g die Steigung $-\frac{4}{3}$. Der Tiefpunkt von K_g hat die x -Koordinate 2.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion g .

(zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$)

b) Zeichnen Sie K_g im Bereich $-2 \leq x \leq 6$.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_g mit der x -Achse einschließt.

Die Funktion f ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\right) \cdot e^x$.

Der Graph von f ist K_f .

Die Funktion F ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 6x + 9) \cdot e^x$.

d) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

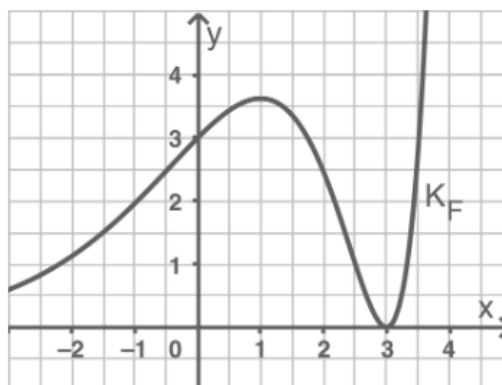
e)

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen K_F der Funktion F .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Begründen Sie ihre Entscheidung jeweils mithilfe von K_F .

1. K_f besitzt genau einen Extrempunkt im Intervall $[-2;3]$.
2. Es gilt: $f(2,5) = -1$
3. Es gilt: $f'(1,5) < 0$



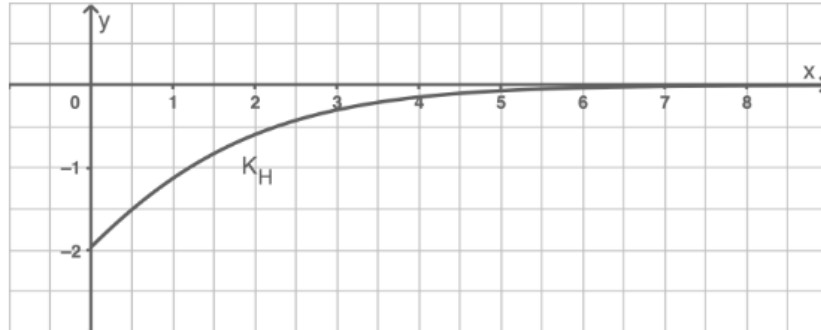
Der Graph der Funktion h entsteht, indem K_f zuerst um 1 nach rechts verschoben und dann an der y -Achse gespiegelt wird.

f) Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen korrekt sind:

- 1.) Die Reihenfolge der beiden Transformationen spielt eine Rolle.
- 2.) Die Funktion H mit $H(x) = -F(-x - 1)$ ist eine Stammfunktion von h .

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen K_H einer Stammfunktion H von h für $x \geq 0$.

Die positive x -Achse ist Asymptote von K_H . Zudem ist K_H in diesem Bereich streng monoton steigend.



g) Die Integralfunktion I_0 ist definiert durch $I_0(x) = \int_0^x h(t) dt$.

Begründen Sie mit Hilfe von K_H , dass $I_0(100) < 2,1$.

Lösungen**1 Analysis**

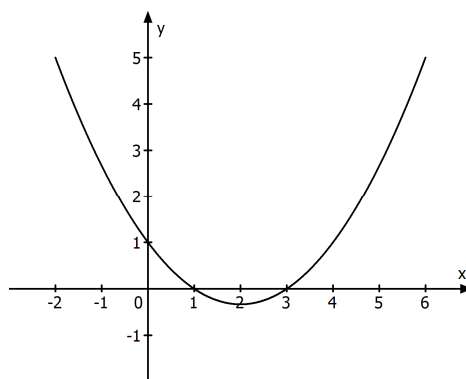
a) Ansatz für die Funktionsgleichung: $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $g'(x) = 2ax + b$.

Bedingungen:

- $S_y(0 | 1): g(0) = 1 \Rightarrow c = 1$
- Steigung $-\frac{4}{3}: g'(0) = -\frac{4}{3} \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$
- Tiefpunkt bei $x = 2: g'(2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \Leftrightarrow 4a = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

Es gilt $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$

b) Zeichnung (mit Hilfe der Wertetabelle des TR)



c) Aus dem Schaubild ergibt sich, dass sich der gesuchte Flächeninhalt unterhalb der x-Achse im Intervall $[1;3]$ befindet.

$$\int_1^3 g(x) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 1x \right]_1^3 = 0 - \frac{4}{9} = -\frac{4}{9}$$

Der Flächeninhalt beträgt $A = \frac{4}{9}$ FE.

d) Der Stammfunktionsnachweis wird über die Bedingung $F'(x) = f(x)$ geführt.

Ableitung von $F(x)$ mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{3} \cdot (2x - 6) \cdot e^x + \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 6x + 9) \cdot e^x = \frac{1}{3} e^x \cdot (2x - 6 + x^2 - 6x + 9) \\ &= \frac{1}{3} e^x \cdot (x^2 - 4x + 3) = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{4}{3} x + 1 \right) \cdot e^x = f(x) \end{aligned}$$

e) 1.) Der Graph K_F besitzt im Intervall $[-2;3]$ zwei Wendepunkte. Damit besitzt K_F in diesem Intervall zwei Extrempunkte. Die Aussage ist falsch.

2.) $f(2,5) = F'(2,5)$ gibt die Steigung der Tangente an K_F an der Stelle 2,5 an.
Da die Steigung der Tangente an K_F bei $x = 2,5$ ungefähr -3 beträgt, gilt $f(2,5) \approx -3$. Die Aussage ist falsch.

3.) Das Vorzeichen von $f'(1,5) = F''(1,5)$ beschreibt die Krümmung des Schaubildes von F . Da K_F bei $x = 1,5$ rechtsgekrümmt ist stimmt die Aussage.

f) Es gilt $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\right) \cdot e^x$.

1.) Zuerst um 1 nach rechts verschieben: $f(x-1) = \left(\frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{4}{3}(x-1) + 1\right) \cdot e^{x-1}$

Dann an der y-Achse spiegeln:

$$h(x) = f(-x-1) = \left(\frac{1}{3}(-x-1)^2 - \frac{4}{3}(-x-1) + 1\right) \cdot e^{-x-1}$$

Zuerst an der y-Achse spiegeln: $f(-x) = \left(\frac{1}{3}(-x)^2 - \frac{4}{3}(-x) + 1\right) \cdot e^{-x}$

Dann um 1 nach rechts verschieben:

$$k(x) = f(-(x-1)) = \left(\frac{1}{3}(-(x-1))^2 - \frac{4}{3}(-(x-1)) + 1\right) \cdot e^{-(x-1)}$$

Da $h(x) \neq k(x)$ ist, spielt die Reihenfolge der Transformation eine Rolle.
Die Aussage ist wahr.

2.) Es soll nachgewiesen werden, dass $H'(x) = h(x)$.

Ableiten von $H(x) = -F(-x-1)$ mit der Kettenregel:

$$H'(x) = -f(-x-1) \cdot (-1) = f(-x-1) = h(x)$$

Die Aussage ist wahr.

g) Es gilt $I_0(100) = \int_0^{100} h(t) dt = [H(t)]_0^{100} = H(100) - H(0)$

Da die x-Achse die Asymptote des Graphen von H ist, gilt $H(100) \approx 0$.

Damit ergibt sich $H(100) - H(0) \approx 0 - (-2) = 2 < 2,1$.