

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil A – Wahlaufgaben (A5) / Problemlöseaufgabe (A6)

Hilfsmittel:

A5: keine

A6: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

5/1 Stochastik (2 BE und 3 BE)

Ein Spiel besteht aus 25 verschiedenen Karten.

Jede Karte ist mit einer der fünf Zahlen 1, 2, 3, 4 oder 5 bedruckt und hat eine der fünf Farben Gelb, Rot, Blau, Grün und Violett.

Bei dem Spiel werden nacheinander Karten ohne Zurücklegen gezogen.

- a) Zwei der 25 Karten werden zufällig gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine dieser Karten mit der Zahl 4 bedruckt ist.

- b) Drei der 25 Karten werden zufällig gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese drei Karten sowohl unterschiedliche Farben haben als auch mit unterschiedlichen Zahlen bedruckt sind.

5/2 Stochastik (2 BE und 3 BE)

Für das Sommerfest hat die SMV ein Glücksrad mit farbigen Sektoren vorbereitet: Der grüne Sektor nimmt die Hälfte des Glücksrades ein, der blaue Sektor ein Drittel und der rote Sektor ein Sechstel. Das Glücksrad wird viermal gedreht.

- a) Geben Sie einen Term an, mit dem sich die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses berechnen lässt: „Es wird mindestens einmal Rot gedreht.“
- b) Bei dem Glücksspiel berechnet die SMV die auf lange Sicht zu erwartende Auszahlung (in Euro) pro Spiel mit

$$5 \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right).$$

Beschreiben Sie in der Anwendungssituation Regeln für die Auszahlung.

5/3 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Die Ebene E ist gegeben durch $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$.

a) Eine zur Ebene E parallele Gerade g ist für eine reelle Zahl a gegeben durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Wert von a so, dass g in E liegt.

b) Die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.

Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden, die dieses Dreieck in zwei Teildreiecke mit gleichem Flächeninhalt zerlegt.

5/4 Lineare Algebra (5 BE)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} x & +y & +z & = 12 \\ 5x & +10y & +20z & = 150 \end{array}$$

Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems, wenn x , y und z natürliche Zahlen sind.

6 Analysis (Problemlöseaufgabe) (10 BE)

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentieren und reflektieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Gegeben sind folgende drei Eigenschaften, die eine Funktion f bzw. deren Graph haben kann:

- f ist eine Polynomfunktion.
- Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y -Achse.
- Der Graph von f besitzt mindestens einen Hochpunkt.

Bestimmen Sie jeweils einen passenden Funktionsterm, so dass die Funktion f

- a) ...genau zwei der drei Eigenschaften erfüllt.
- b) ...alle drei Eigenschaften erfüllt.
- c) ...keine der drei Eigenschaften erfüllt.

Lösungen**5/1 Stochastik**

- a) Es gibt fünf Karten, auf denen die Zahl „4“ abgedruckt ist.

$$P(\text{genau eine „4“}) = P(\text{zuerst „4“, dann keine „4“}) + P(\text{zuerst keine „4“, dann „4“})$$

$$= \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} + \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{3}$$

- b) Welche Karte beim ersten Zug gezogen wird, spielt keine Rolle.
 Beim zweiten Zug stehen nur noch 4 Farben und 4 Zahlen zur Verfügung, also insgesamt $4 \cdot 4 = 16$ Karten.
 Beim dritten Zug stehen nur noch 3 Farben und 3 Zahlen zur Verfügung, also insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ Karten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{25}{25} \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{9}{23} = \frac{6}{23}$.

5/2 Stochastik

a) $P(\text{mindestens einmal Rot}) = 1 - P(\text{kein Rot}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

b) Der Term $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei viermaligem

Drehen des Glücksrades zweimal grün und zweimal blau gedreht wird (gemäß der Formel von Bernoulli).

Der Term $\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei viermaligem

Drehen des Glücksrades viermal grün oder viermal blau gedreht wird.

Interpretation des gesamten Terms:

Wenn zweimal grün und zweimal blau gedreht wird, bekommt der Spieler 5 € ausgezahlt. Wenn viermal grün oder viermal blau gedreht wird, bekommt der Spieler 20 € ausgezahlt.

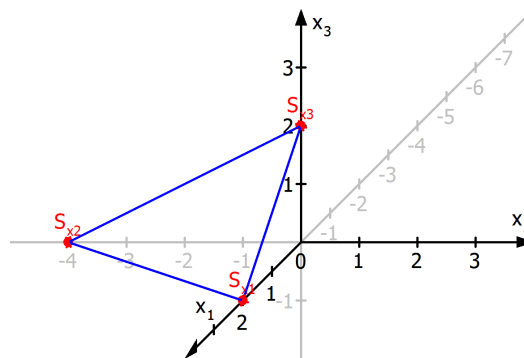
In allen anderen Fällen bekommt der Spieler kein Geld ausgezahlt.

5/3 Lineare Algebra

- a) Es ist bereits aufgrund der Aufgabenstellung bekannt, dass die Gerade g zu E parallel ist.
Somit muss nur geprüft werden, ob der Punkt $P(1|-4|a)$ von g auf E liegt.

Einsetzen der Punktkoordinaten in die Ebenengleichung:
 $2 \cdot 1 - (-4) + 2a = 4 \Leftrightarrow 6 + 2a = 4 \Leftrightarrow a = -1$

- b) Zunächst werden die Spurpunkte von $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$ berechnet.
 $S_{x_1}(2|0|0)$ und $S_{x_2}(0|-4|0)$ und $S_{x_3}(0|0|2)$



Die Seiten $\overline{S_{x_2}S_{x_1}}$ und $\overline{S_{x_3}S_{x_2}}$ sind gleich lang.

Somit teilt die Gerade durch den Mittelpunkt M von $\overline{S_{x_3}S_{x_1}}$ und $S_{x_2}(0|-4|0)$ das Dreieck in zwei gleich große Hälften.
 Der Mittelpunkt M hat die Koordinaten $M(1|0|1)$.

Gleichung von g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

5/4 Lineare Algebra

$$(1) \quad x + y + z = 12$$

$$(2) \quad 5x + 10y + 20z = 150$$

$$(1) \quad x + y + z = 12$$

$$5 \cdot (1) - (2) \quad -5y - 15z = -90$$

Die Variablen x, y, z sollen natürliche Zahlen sein, also aus der Menge $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ stammen.

- 1.Fall: Wähle $z = 0$. Daraus folgt $y = 18$ und $x = -6$, also nicht möglich.
- 2.Fall: Wähle $z = 1$. Daraus folgt $y = 15$ und $x = -4$, also nicht möglich.
- 3.Fall: Wähle $z = 2$. Daraus folgt $y = 12$ und $x = -2$, also nicht möglich.
- 4.Fall: Wähle $z = 3$. Daraus folgt $y = 9$ und $x = 0$. Dies ist eine Lösung.
- 5.Fall: Wähle $z = 4$. Daraus folgt $y = 6$ und $x = 2$. Dies ist eine Lösung.
- 6.Fall: Wähle $z = 5$. Daraus folgt $y = 3$ und $x = 4$. Dies ist eine Lösung.
- 7.Fall: Wähle $z = 6$. Daraus folgt $y = 0$ und $x = 6$. Dies ist eine Lösung.

Lösungsmenge: $L = \{(0; 9; 3), (2; 6; 4), (4; 3; 5), (6; 0; 6)\}$

6 Analysis (Problemlöseaufgabe)

Analyse:

- Was ist eine Polynomfunktion?
f hat die Gestalt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
- Welche Funktionen sind keine Polynomfunktionen?
z.B. trigonometrische Funktionen $f(x) = \sin(x)$ oder $f(x) = \cos(x)$ oder
Exponentialfunktionen $f(x) = e^x$
- Gibt es Polynomfunktionen, die nicht achsensymmetrisch sind?
Ja, wenn nicht alle Exponenten bei x geradzahlig sind.
- Gibt es Polynomfunktionen, die keinen Hochpunkt besitzen?
Ja, z.B. die nach oben geöffnete Normalparabel $f(x) = x^2$

Durchführung:

a) ...genau zwei der drei Eigenschaften erfüllt.

- 1) „f ist eine Polynomfunktion“ und „Graph ist achsensymmetrisch“: $f(x) = x^2$
- 2) „f ist eine Polynomfunktion“ und „Graph besitzt mindestens einen Hochpunkt“:
 $f(x) = -(x+1)^2$
- 3) „Graph ist achsensymmetrisch“ und „Graph besitzt mindestens einen Hochpunkt“:
 $f(x) = \cos(x)$

b) ...alle drei Eigenschaften erfüllt.

$$f(x) = -x^2$$

c) ...keine der drei Eigenschaften erfüllt.

$$f(x) = e^x$$