Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)

Baden-Württemberg

Teil A - Pflichtaufgaben

Hilfsmittel: keine

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

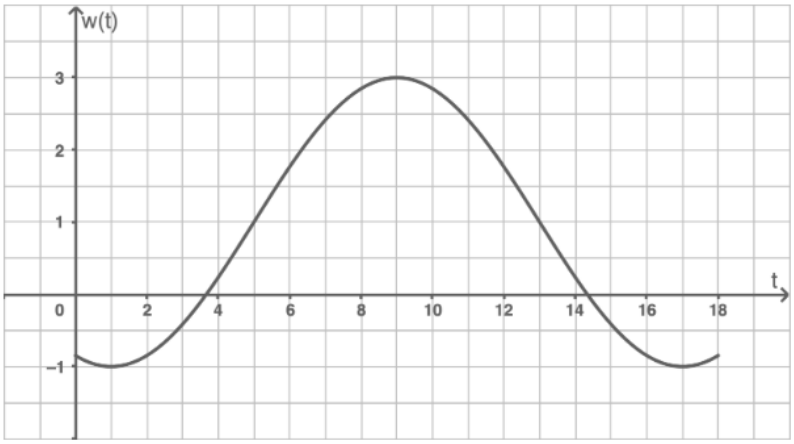
1 Analysis (5 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$.
K ist der Graph der Funktion.

Berechnen Sie
- die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunkts von K und
- die Steigung von K im Wendepunkt.

2 Analysis (2 BE und 3 BE)

In einem Wassertank wird Wasser gespeichert.
Die Abbildung zeigt den Verlauf der momentanen Änderungsrate w(t) des Wasservolumens im Tank. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit Beginn der Beobachtung (t = 0) und w(t) die momentane Änderungsrate in m³ pro Stunde zum Zeitpunkt t. Der Beobachtungszeitraum beträgt 18 Stunden.

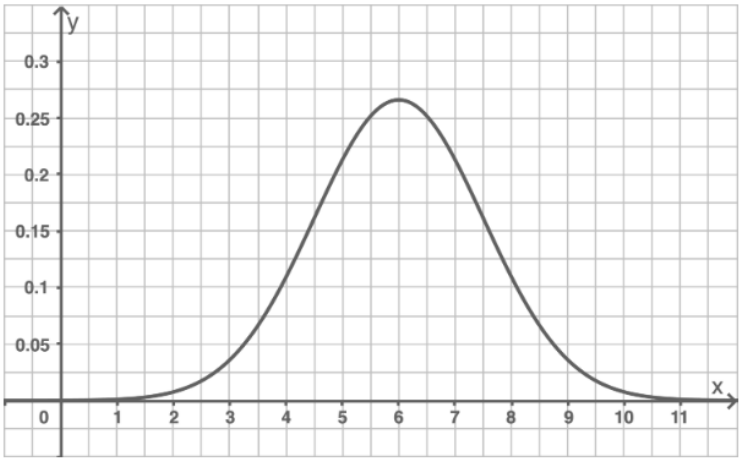


a) Begründe, dass neun Stunden nach Beginn der Beobachtung mehr Wasser im Tank ist als zu Beginn.

b) Die Funktion w ist eine trigonometrische Funktion.
Ermittle einen möglichen Funktionsterm dieser Funktion.

3 Stochastik (1 BE und 2 BE und 2 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.



a) Geben Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X an.

b) Geben Sie näherungsweise den Wert der Standardabweichung von X an. Begründen Sie diesen.

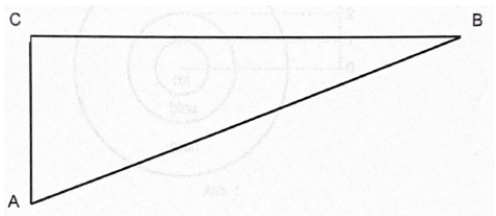
c) Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsgröße X im Intervall [5;7] liegt.

4 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Die Punkte A(5|-1|2), B(9|2|12) und C(3|-2|4) sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel besitzt.

b) Die abgebildete Skizze stellt das Dreieck ABC dar.



Nun wird ein Punkt P hinzugefügt, sodass dieser zusammen mit A, B und C die Eckpunkte eines Parallelogramms bildet.

- Erweitern Sie die Skizze um einen möglichen Punkt P.
- Bestimmen Sie mögliche Koordinaten des Punktes P so, dass das Parallelogramm kein Rechteck ist.

Lösungen

1 Analysis

Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunkts:

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Mit $f(x) = x^3 + 3x^2$ folgt $f'(x) = 3x^2 + 6x$ und $f''(x) = 6x + 6$

$3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3x + 6) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): $x_1 = 0$
Gleichung II): $3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(0 \mid f(0))$ bzw. $T(0 \mid 0)$
$f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(-2 \mid f(-2))$ bzw. $H(-2 \mid 4)$

Steigung im Wendepunkt:

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
Es gilt $f'''(x) = 6$
$6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$f'''(-1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei x = -1

Steigung im Wendepunkt: $f'(-1) = -3$

2 Analysis

a) Die Veränderung der Wassermenge in den ersten neun Stunden wird durch das Integral $\int_0^9 w(t)dt$ dargestellt.

Das Integral ist positiv, da der Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von w und der t-Achse oberhalb der t-Achse größer ist als unterhalb der t-Achse.
Somit ist neun Stunden nach Beginn der Beobachtung mehr Wasser im Tank ist als zu Beginn.

b) Ansatz einer allgemeinen Kosinusfunktion: $w(t) = a \cdot \cos(b \cdot (t - c)) + d$
Höhe der waagrechten Mittellinie: d = 1
Amplitude: a = 2
Aus der Abbildung ergibt sich die Periode p = 16, daraus folgt $b = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$.
Da das Schaubild der Grundkosinusfunktion auf der y-Achse einen Hochpunkt besitzt, liegt hier noch eine Verschiebung um c = 9 nach rechts vor.
Möglicher Funktionsterm: $w(t) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot (t - 9)\right) + 1$

3 Stochastik

a) Der Erwartungswert ist die Maximumstelle der Dichtefunktion, also gilt $\mu = 6$.

b) Die Standardabweichung kann mit Hilfe der Wendestellen der Dichtefunktion ermittelt werden. Die Wendestellen liegen bei $x \approx 4{,}5$ und $x \approx 7{,}5$.

Damit lautet die Standardabweichung $\sigma = 6 - 4{,}5 = 1{,}5$ (oder $\sigma = 7{,}5 - 6 = 1{,}5$

Man könnte den Erwartungswert auch direkt aus der Abbildung ablesen – es handelt sich um die Stelle mit dem höchsten Balken.

c) Die Wahrscheinlichkeit entspricht der Flächen zwischen dem Schaubild der Dichtefunktion und der x-Achse im Intervall [5;7].
Hierzu müssen Kästchen gezählt werden – es sind ca. 40 Kästchen.

Ein Kästchen hat den Flächeninhalt $0{,}5 \cdot 0{,}025 = 0{,}0125$.

Somit gilt: $P(5 \le X \le 7) \approx 40 \cdot 0{,}0125 = 0{,}5$

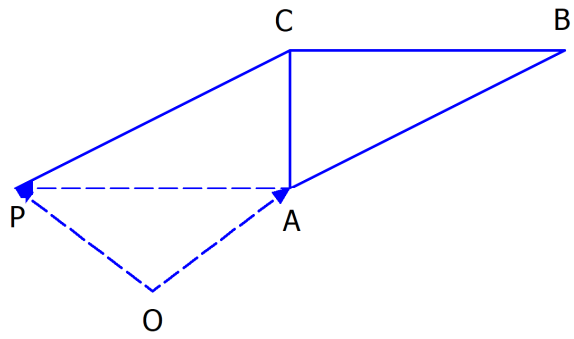
4 Lineare Algebra

a) Nachweis rechter Winkel im Punkt C:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 12 + 4 - 16 = 0$$

Da das Skalarprodukt Null ergibt, schließen die Vektoren einen rechten Winkel ein.
Somit besitzt das Dreieck im Punkt C einen rechten Winkel.

b) Ergänzung des Dreiecks um einen Punkt P, so dass das Viereck ABCP ein Parallelogramm ist.



Das Parallelogramm in der Skizze ist kein Rechteck, so dass dieses Parallelogramm für die Berechnung von P genutzt werden kann.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ein möglicher Punkt wäre P(-1|-5|-6).

Hinweis:

Ein weiterer Punkt ergibt sich aus der Gleichung

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Ein weiterer möglicher Punkt wäre P(7|1|14).