Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Stochastik – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe III 2

Die Zufallsgröße Z gibt die Fahrzeit eines Linienbusses zwischen zwei bestimmten Haltestellen an. Sie kann näherungsweise als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ und der Standardabweichung $\sigma = 30$ angenommen werden (alle Werte in Sekunden).

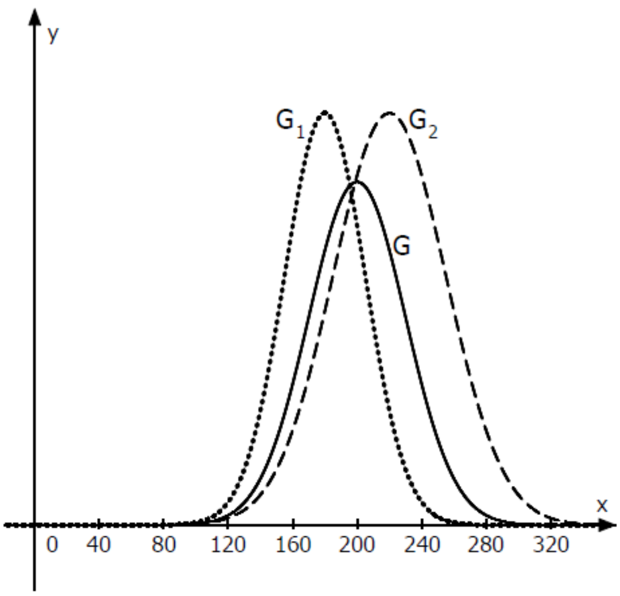
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen weniger als 150 Sekunden beträgt. (1 BE)

b) Ermitteln Sie das kleinste Intervall, in dem die Fahrzeit einer zufällig ausgewählte fahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% liegt. (4 BE)

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn zufällig ausgewählten Fahrten die Fahrzeit bei genau zwei Fahrten mehr als 220 Sekunden beträgt. (3 BE)

An Markttagen ist die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen durchschnittlich etwas länger als an den übrigen Tagen. Diese Fahrzeit kann durch die normalverteilte Zufallsgröße Z* beschrieben werden.

d) In der Abbildung ist G der Graph der Dichtefunktion von Z. Untersuchen Sie, ob einer der Graphen G_1 und G_2 der Graph der Dichtefunktion von Z* sein könnte. (2 BE)



Eine Fahrt mit einer Fahrzeit von mehr als 240 Sekunden zwischen den beiden Haltestellen gilt als verspätet. Dies ist bei 9% aller Fahrten der Fall. 20% aller Fahrten finden an Markttagen statt. Ein Vierteil der Fahrten an Markttagen ist verspätet.
Zu einer zufällig ausgewählten Fahrt werden folgende Ereignisse betrachtet:
V: „Die Fahrt ist verspätet."
M: „Die Fahrt findet an einem Markttag statt."

e) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. (4 BE)

f) Von den Fahrten ohne Verspätung wird eine Fahrt zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese an einem Tag ohne Markt stattfindet. (2 BE)

g) Eine städtische Mitarbeiterin hält 240 Sekunden als Grenze, ab der eine Fahrt als verspätet gilt, für zu streng. Deshalb schlägt sie vor, eine neue Grenze so festzulegen, dass nur noch 15% der Fahrten an einem Markttag als verspätet gelten. Mit dieser neuen Grenze finden 51% der verspäteten Fahrten an einem Markttag statt. Bestimmen Sie diese neue Grenze. (4 BE)

Lösungen

Aufgabe III 2

a) $P(Z < 150) \approx 0{,}05$

b) Damit das Intervall möglichst klein wird, muss das Intervall symmetrisch um den Erwartungswert $\mu = 200$ liegen.

Bedingung: $P(200 - a \leq Z \leq 200 + a) = 0{,}6$
Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung folgt daraus: $P(Z \leq 200 - a) = 0{,}2$

Mit dem Taschenrechner ("norminv"-Befehl) ergibt sich:
$200 - a \approx 174{,}8$

Das gesuchte Intervall lautet [174,8;225,2].

c) Wahrscheinlichkeit, dass eine Fahrt länger als 220 Sekunden dauert:
$P(Z > 220) \approx 0{,}25$

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,25.

$P(X = 2) \approx 0{,}28$

d) Der Graph G_1 kann nicht Graph der Dichtefunktion von Z* sein, weil er gegenüber G nach links verschoben ist und daher der Erwartungswert kleiner als 200 sein müsste.
Der Graph G_2 kann nicht Graph der Dichtefunktion Z* sein, weil der Inhalt der Fläche zwischen G_2 und der x-Achse deutlich größer ist als der Inhalt der Fläche zwischen G und der x-Achse.
Die Fläche zwischen einer Dichtefunktion und der x-Achse muss aber immer gleich groß (nämlich 1) betragen.

e)

	V	$\overline{V}$	
M	0,05 *)	0,15	0,2
$\overline{M}$	0,04	0,76	0,8
	0,09	0,91	1

*) Ein Viertel von 0,2 ist 0,05.

f) Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit der Bedingung $\overline{V}$:

$$P_{\overline{V}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{M})}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}76}{0{,}91} = 0{,}835$$

g) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit P(V) = x.

	V	$\overline{V}$	
M	0,03 *)	0,17	0,2
$\overline{M}$			0,8
	x	1-x	1

*) 15% von 0,2 sind 0,03

Bedingung: 51% der verspäteten Fahrten finden an einem Markttag statt:

$$0,51 \cdot x = 0,03 \Rightarrow x = \frac{1}{17}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Verspätung soll also $\frac{1}{17}$ betragen.

Bedingung: $P(Z \geq z) = \frac{1}{17} \Rightarrow P(Z \leq z) = 1 - \frac{1}{17}$

Mit dem norminv-Befehl des Taschenrechners folgt daraus z = 246,9.

Die neue Grenze würde unter den gegebenen Bedingungen bei ca. 247 Sekunden liegen.