

Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Stochastik – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe III 1

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14% das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)
- b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10% größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80% aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90% auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95% etwas höher.

- c) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)
- d) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde. (3 BE)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14% durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8% und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 14%.“ Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

- e) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)
- f) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 15% beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Lösungen**Aufgabe III 1**

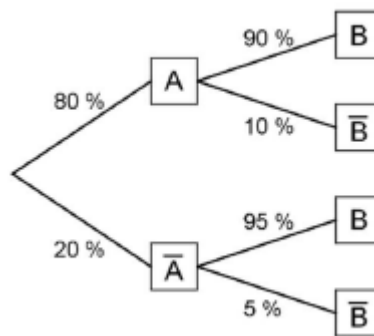
- a) Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Radausflügler.
 X ist binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0,14$.

$$P(X = 36) \approx 0,042$$

- b) Der Erwartungswert von X beträgt $\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0,14 = 42$.
 10% vom Erwartungswert sind 4,2.

$$P(X \geq 42 + 4,2) = P(X \geq 47) = 1 - P(X \leq 46) \approx 1 - 0,78 = 0,22$$

- c) A: „Die Fahrkarte wird spätestens am Vortag gebucht.“
 B: „Die Fahrkarte wird genutzt.“



- d) Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
 Die Bedingung ist \bar{B} : Die Fahrkarte wird nicht genutzt.

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,8 \cdot 0,1}{P(\bar{B})} = \frac{0,08}{P(\bar{B})}$$

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,2 \cdot 0,05}{P(\bar{B})} = \frac{0,01}{P(\bar{B})}$$

$$\text{Damit ist } P_{\bar{B}}(A) = 8 \cdot P_{\bar{B}}(\bar{A})$$

Die Aussage ist richtig.

- e) Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,14$
 Alternativhypothese: $H_1 : p > 0,14$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit $\alpha = 8\%$.

Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,14$.

Ablehnungsbereich: $A = \{g; g + 1; \dots; 500\}$

Bedingung: Gesucht ist das kleinstmögliche g mit $P(Y \geq g) \leq 0,08$

Probe mit dem TR:

$$g = 81: P(Y \geq 81) \approx 0,09$$

$$g = 82: P(Y \geq 82) \approx 0,071$$

Der Ablehnungsbereich lautet $A = \{82; \dots; 500\}$

Befinden sich mindestens 82 Radausflügler in der Stichprobe, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

- f) Bei $n = 200$ wäre laut Aufgabenstellung der Ablehnungsbereich bei e)
 $A = \{36; \dots; 200\}$.

Ein Fehler 2.Art liegt vor wenn p in die Gegenhypothese fällt (also für $p > 0,14$) aber das Testergebnis nicht in den Ablehnungsbereich fällt (also höchstens 35 Radausflügler vorhanden sind).

Die Zufallsgröße Z sei binomialverteilt mit unbekanntem p und $n = 200$.

Probe mit TR:

$$p = 0,20: P(Z \leq 35) \approx 0,2$$

$$p = 0,21: P(Z \leq 35) \approx 0,13$$

Der tatsächliche Anteil der Radausflügler müsste mindestens 21% betragen.

Interpretation des Fehlers 2.Art:

Obwohl der Anteil der Radausflügler auf über 14% gestiegen ist, entscheidet man sich aufgrund des Testergebnisses dafür, den Betrieb der Shuttlebusse einzustellen.