Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Analytische Geometrie – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe II 2

Gegeben ist die Ebene F: $x_1 - 3x_2 - x_3 = -6$.

a) Stellen Sie F in einem Koordinatensystem dar. (2 BE)

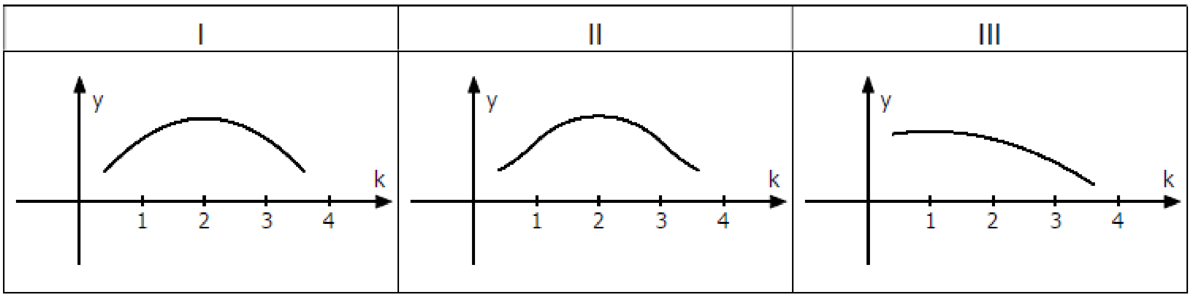
b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den F mit der Ebene $G: -2x_1 + 6x_2 = 8$ einschließt. (3 BE)

Betrachtet wird die Schar der Ebenen $E_k: 2x_1 - 6x_2 + (4-k) \cdot x_3 = -2k$ mit $k \in \mathbb{R}$.

c) Die Ebene F gehört zu dieser Schar.
Geben Sie den zugehörigen Wert von k an. (1 BE)

d) Für einen Wert von k ist E_k orthogonal zu F.
Ermitteln Sie diesen Wert von k. (3 BE)

e) Für jedes k mit 0,4 < k < 3,6 sind die Spurpunkte von E_k auf der x_1- und der x_2-Achse und der Punkt $(0 \mid \frac{4}{3} \mid 0)$ die Eckpunkte eines Dreiecks D_k. Einer der drei abgebildeten Graphen stellt den Flächeninhalt von D_k in Abhängigkeit von k dar. Entscheiden Sie, welcher Graph das ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (4 BE)



f) Es gibt eine Gerade h, die in allen Ebenen der Schar liegt. Ermitteln Sie eine Gleichung von h.

(*zur Kontrolle:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) (4 BE)

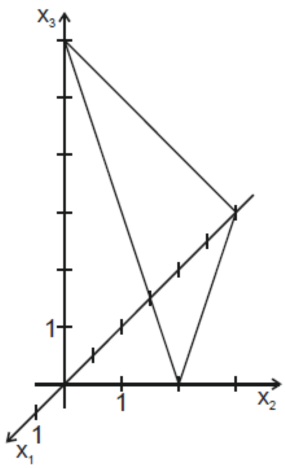
g) Begründen Sie, dass h parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft. (1 BE)

h) Die Ebene J enthält die Gerade h, sie ist jedoch keine Ebene der Schar.
Geben Sie eine Gleichung von J an. (2 BE)

Lösungen

Aufgabe II 2

a) F: $x_1 - 3x_2 - x_3 = -6$
Spurpunkte von F: $S_1(-6|0|0)$ $S_2(0|2|0)$ $S_3(0|0|6)$



b) $$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+9+1} \cdot \sqrt{4+36}} = \frac{20}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{40}} \Rightarrow \alpha \approx 17{,}5^\circ$$

c) Der Normalenvektor der Ebenenschar muss ein Vielfaches vom Normalenvektor der Ebene F sein:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\\4-k\end{pmatrix}$$

Aus Zeile 1 und 2 folgt $\lambda = 2$.
Aus Zeile 3 folgt: $-\lambda = 4 - k \Leftrightarrow k = 6$

d) Die Ebenen sind orthogonal, wenn ihre zugehörigen Normalenvektoren orthogonal zueinander sind:

$$\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-6\\4-k\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow 2 + 18 - (4-k) = 0 \Leftrightarrow 20 - 4 + k = 0 \Leftrightarrow k = -16$$

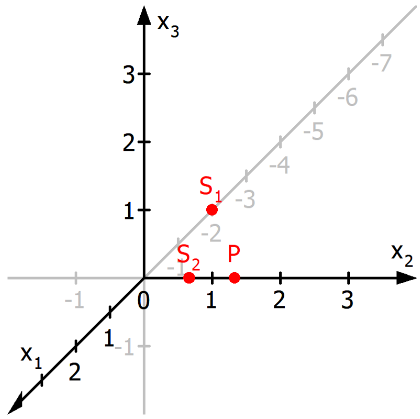
e) $E_k: 2x_1 - 6x_2 + (4-k)\cdot x_3 = -2k$

Spurpunkt mit der x_1-Achse: $S_1(-k\,|\,0\,|\,0)$

Spurpunkt mit der x_2-Achse: $S_2(0\,|\,\frac{1}{3}k\,|\,0)$

Punkt $P(0\,|\,\frac{4}{3}\,|\,0)$

Skizze für k = 2:



Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2}\cdot \overline{S_2P}\cdot \overline{OS_2}$

Es gilt $\overline{S_2P} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}k$ und $\overline{OS_1} = k$

Flächeninhalt: $A_k = \frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}k)\cdot k$

Der Graph von A ist eine Parabel mit den Nullstellen k = 0 und k = 4.
Der Scheitelpunkt der Parabel befindet sich bei k = 2.
Also stellt Graph I den Flächeninhalt des Dreiecks dar.

f) Wähle zwei Ebenen der Schar (z.B. mit k = 0 und k = 4):

$E_0: 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0$
$E_4: 2x_1 - 6x_2 = -8$

Berechnung der Schnittgerade h :
Wähle $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Aus der 2.Zeile folgt: $2x_1 - 6t = -8 \Leftrightarrow x_1 = -4 + 3t$
Aus der 1.Zeile folgt: $2(-4+3t) - 6t + 4x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2$

Gleichung von h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4+3t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweis:
Da in der Aufgabe vorausgesetzt wird, dass die Gerade h in allen Ebenen der Schar liegt muss dies nicht geprüft werden.

g) Der Richtungsvektor von h hat die x_3-Koordinate 0, also verläuft die Gerade h parallel zur x_1x_2-Ebene.

h) Die Gerade h verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene mit einem Abstand von d = 2 (siehe 3.Zeile in der Parametergleichung von h).

Somit liegt h in der Ebene J: $x_3 = 2$.
Diese Ebene gehört jedoch nicht zur Ebenenschar.