Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Analytische Geometrie – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

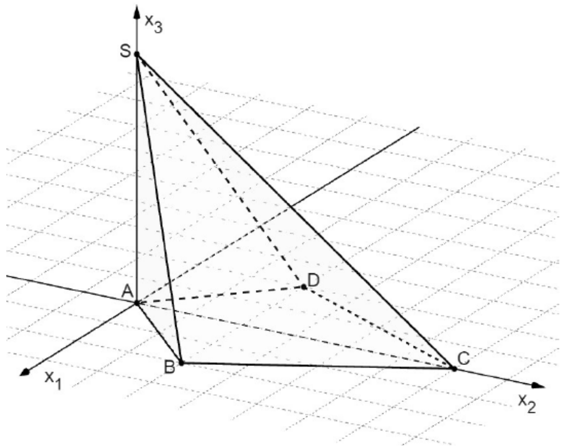
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe II 1

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten A(0|0|0), B(2|2|0), C(0|6|0) und D(-2|2|0). Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt S(0|0|6).

a) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide ABCDS. (4 BE)



Der Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

b) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist. (3 BE)

c) Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (3 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in \left]0;3\right[$.
Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k, wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $\overline{SC}$ liegt.

d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein. (4 BE)

e) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert. (6 BE)

Lösungen

Aufgabe II 1

a) Die kürzeste Kante ist $\overline{AB}$.

Kantenlänge: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Volumenformel der Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

G = Grundfläche der Pyramide = $A_{\text{Drachenviereck}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

Höhe der Pyramide = x_3-Koordinate von S = 6

$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24$

b) Der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein vielfacher Vektor von $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein vielfacher Vektor von $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Da die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ Spannvektoren der Ebene E sind und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ senkrecht zu diesen Vektoren steht, ist $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E.

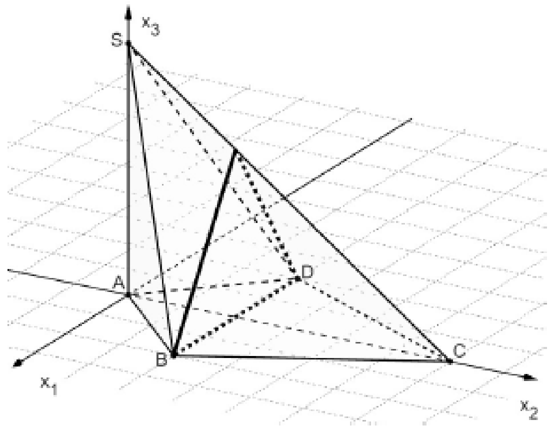
c) Schnittwinkel von E zur x_1x_2-Ebene:

Hinweis: Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 65{,}9°$$

d) Gleichung von F_2: $2x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 2$

Die Ebene F_2 ist eine um 2 LE nach rechts verschobene Parallele zur x_1x_3 -Ebene.



e) Das Dreieck BDQ_k ist gleichschenklig. Der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k ist minimal, wenn die Dreieckshöhe $\left|\overrightarrow{MQ_k}\right|$ am kleinsten ist, wobei M(0|2|0) der Mittelpunkt von $\overline{BD}$ ist.
Die Dreieckshöhe ist am kleinsten, wenn der Vektor $\overrightarrow{MQ_k}$ orthogonal auf der Kante $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ steht.

Somit muss die zugehörige Ebene F_k senkrecht zur Kante $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ stehen.

Dies ist der Fall, wenn $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ ein (vielfacher) Normalenvektor der Ebene F_k ist.

Bedingung: $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aus der 2.Zeile folgt $k = 6\lambda$.
Aus der 3.Zeile folgt: $k - 2 = -6\lambda$

Daraus folgt $6\lambda - 2 = -6\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$ und damit k =1.