

Analysis

Ganzrationale Funktionen Nullstellen, Extrempunkte, globales Verhalten

Gymnasium Klasse 10

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2018

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 7,5$.

Bestimme von der Funktion die Nullstellen, die Extrempunkte sowie ihr Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Aufgabe 2:

Untersuche die Funktionen $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4,5x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$ auf Extrempunkte.

Lösungen**Aufgabe 1:**Nullstellen von $f(x)$: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 7,5 = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 15 = 0 \quad \text{Substitution } u = x^2$$

$$\Rightarrow u^2 - 2u - 15 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow u_1 = 5 \text{ und } u_2 = -3$$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$x^2 = -3 \Rightarrow \text{nicht lösbar}$$

Das Schaubild besitzt 2 Nullstellen bei $x = \pm\sqrt{5}$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\text{Es gilt } f'(x) = 2x^3 - 2x$$

$$2x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x^2 - 1) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hinreichende Bedingung: Kontrolle mit dem Vorzeichenwechsel

$$x = -1: f'(-2) = -8 < 0 \quad \text{und} \quad f'(-0,5) = 0,75 > 0$$

Es existiert ein VZW von $-$ nach $+$, also existiert bei $x = -1$ ein Tiefpunkt

$$T(-1 | f(-1)) \rightarrow T(-1 | -8)$$

$$x = 0: f'(-0,5) = 0,75 > 0 \quad \text{und} \quad f'(0,5) = -0,75 < 0$$

Es existiert ein VZW von $+$ nach $-$, also existiert bei $x = 0$ ein Hochpunkt

$$H(0 | f(0)) \rightarrow H(0 | -7,5)$$

$$x = 1: f'(0,5) = -0,75 < 0 \quad \text{und} \quad f'(2) = 8 > 0$$

Es existiert ein VZW von $-$ nach $+$, also existiert bei $x = 1$ ein Tiefpunkt

$$T(1 | f(1)) \rightarrow T(1 | -8)$$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (entscheidend ist der Term $\frac{1}{2}x^4$)Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (entscheidend ist der Term $\frac{1}{2}x^4$)

Aufgabe 2:

Extrempunkte von $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4,5x$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4,5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 4,5 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

Hinreichende Bedingung: Kontrolle mit dem Vorzeichenwechsel

$$x = -3: f'(-4) = 3,5 > 0 \text{ und } f'(-2) = -2,5 < 0$$

Es existiert ein VZW von + nach -, also existiert bei $x = -3$ ein Hochpunkt

$$H(-3 | f(-3)) \rightarrow H(-3 | 9)$$

$$x = 3: f'(2) = -2,5 < 0 \text{ und } f'(4) = 3,5 > 0$$

Es existiert ein VZW von - nach +, also existiert bei $x = 3$ ein Tiefpunkt

$$T(3 | f(3)) \rightarrow T(3 | -9)$$

Extrempunkte von $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$

Notwendige Bedingung: $g'(x) = 0$

$$g'(x) = 2x^3 - 6x^2$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x - 3) = 0 \text{ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } x = 3$$

Hinreichende Bedingung: Kontrolle mit dem Vorzeichenwechsel

$$x = 0: g'(-1) = -8 < 0 \text{ und } g'(1) = -4 < 0$$

Es existiert kein Vorzeichenwechsel, daher existiert bei $x = 0$ auch kein Extrempunkt, sondern ein Sattelpunkt.

$$x = 3: g'(1) = -4 < 0 \text{ und } g'(4) = 32 > 0$$

Es existiert ein VZW von - nach +, daher existiert an der Stelle $x = 3$ ein Tiefpunkt.

$$T(3 | f(3)) \rightarrow T(3 | -13,5)$$