Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Analysis – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe I 2.1

In einem Tierpark soll ein Tier mit Hilfe einer Diät abnehmen. Die Masse dieses Tieres wird für $t \geq 0$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(t) = 36 \cdot e^{-0{,}05t} + 80$ beschrieben (t in Wochen nach Beginn der Diät, f(t) in Kilogramm).

a) Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät. (1 BE)

b) Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht. (1 BE)

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25% seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat. (4 BE)

d) Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt $t_1 = 8$. (3 BE)

e) Für alle $t \geq 0$ gilt $f'(t) < 0$ und $f''(t) > 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. (2 BE)

Für die Funktion h gilt $h(f(t)) = t$ für $t \in \mathbb{R}$.

f) Bestimmen Sie einen Term der Funktion h. (3 BE)

g) Für zwei reelle Zahlen v und w gilt h(v) = w. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. (2 BE)

Aufgabe I 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion g_a gegeben durch $g_a(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x}$ mit maximalem Definitionsbereich. G_a ist der Graph von g_a.

a) Geben Sie eine Gleichung der senkrechten Asymptote von G_a an. (1 BE)

b) Zeigen Sie, dass für alle a > 0 gilt: $\int_1^e g_a(x)dx < 1 - \frac{1}{e}$. (4 BE)

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Punkt P_a mit waagrechter Tangente.

c) Weisen Sie nach, dass P_a die x-Koordinate 2a besitzt. (3 BE)

d) Für jeden Wert von a gilt:
- N_a ist der Schnittpunkt von G_a mit der x-Achse.
- Der Kreis K_a hat den Mittelpunkt P_a und verläuft durch N_a.

Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den K_a die y-Achse berührt. (6 BE)

Lösungen

Aufgabe I 2.1

a) *Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät.*

$f(6) \approx 106{,}7$

Die Masse des Tieres beträgt ca. 106,7 kg.

b) *Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht.*

Für $t \to +\infty$ gilt $f(t) \to 80$, das heißt die waagrechte Asymptote lautet y = 80.

Auf lange Sicht beträgt die Masse 80 kg.

c) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25% seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat.*

Die Anfangsmasse beträgt $f(0) = 116$ kg.
Reduzierung der Anfangsmasse um 25%: $0{,}75 \cdot 116 = 87$ kg

$$87 = 36 \cdot e^{-0{,}05t} + 80 \Leftrightarrow e^{-0{,}05t} = \frac{7}{36} \Leftrightarrow t = \frac{1}{-0{,}05}\ln\left(\frac{7}{36}\right) \approx 32{,}8$$

Etwa 33 Wochen nach Beginn der Diät hat das Tier 25% seiner Anfangsmasse verloren.

d) *Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt $t_1 = 8$.*

Es gilt $f'(t) = 36 \cdot (-0{,}05) \cdot e^{-0{,}05t} = -1{,}8 \cdot e^{-0{,}05t}$
Daraus folgt $f'(8) \approx -1{,}2$.

Die momentane Änderungsrate beträgt etwa -1,2 kg pro Woche.

e) *Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.*

$f'(t) < 0$: Die Funktion f ist streng monoton fallend, das heißt das Tier verliert ständig an Masse.

$f''(t) > 0$: Das Schaubild von f ist linkgekrümmt, das heißt, dass das Tier immer langsamer abnimmt.

f) *Bestimmen Sie einen Term der Funktion h.*

Wegen $h(f(t)) = t$ ist die Funktion h die Umkehrfunktion von f.

Berechnung der Umkehrfunktion von f:

$$y = 36 \cdot e^{-0,05t} + 80 \Leftrightarrow \frac{y-80}{36} = e^{-0,05t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y-80}{36}\right) = -0,05t \Leftrightarrow t = -20 \cdot \ln\left(\frac{y-80}{36}\right)$$

Daraus folgt: $h(x) = -20 \cdot \ln\left(\frac{x-80}{36}\right)$

g) Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

Die Funktion f ordnet der Zeit in Wochen die Masse in kg zu.
Die Umkehrfunktion h ordnet der Masse in kg die Zeit in Wochen zu.

h(v) = w: Wenn das Tier eine Masse von v kg besitzt, sind w Wochen seit Beginn der Diät vergangen.

Aufgabe I 2.2

a) Geben Sie eine Gleichung der senkrechten Asymptote von G_a an.

Da x = 0 eine Definitionslücke der Funktion g_a ist, ist x = 0 eine senkrechte Asymptote.

b) *Zeigen Sie, dass für alle a > 0 gilt: $\int_1^e g_a(x)dx < 1 - \frac{1}{e}$.*

$$\int_1^e g_a(x)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x}\right)dx = \int_1^e \left(x^{-2} - \frac{1}{a} \cdot x^{-1}\right)dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\ln|x|\right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{a} - (-1-0) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{a}$$

Wegen a > 0 ist $1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{e}$.

c) Weisen Sie nach, dass P_a die x-Koordinate 2a besitzt.

Aus $g_a(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x} = x^{-2} - \frac{1}{a}x^{-1}$ folgt $g_a'(x) = -2x^{-3} + \frac{1}{a}x^{-2} = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{a \cdot x^2}$

Wegen $g'(2a) = -\frac{2}{8a^3} + \frac{1}{a \cdot 4a^2} = 0$.

Somit ist 2a die x-Koordinate von P_a.

d) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den K_a *die y-Achse berührt.*

Berechnung des Punktes N_a: $g_a(x) = 0$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x} = 0 \quad | \cdot a \cdot x^2$$

$$a - x = 0 \Leftrightarrow x = a$$

Also ist $N_a(a\,|\,0)$.

Koordinaten von P_a: $g_a(2a) = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{4a^2}$, also ist $P_a(2a\,|\,-\frac{1}{4a^2})$.

Der Radius des Kreises beträgt $\overline{N_aP_a} = \sqrt{(2a-a)^2 + \left(-\frac{1}{4a^2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{16a^4}}$

Der Abstand vom Mittelpunkt P_a von der y-Achse beträgt 2a.

Damit der Kreis die y-Achse berührt, muss der Radius des Kreises somit 2a entsprechen:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{16a^4}} = 2a \quad | \text{ quadrieren}$$

$$a^2 + \frac{1}{16a^4} = 4a^2 \quad | \cdot a^4$$

$$a^6 + \frac{1}{16} = 4a^6 \Leftrightarrow 3a^6 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a^6 = \frac{1}{48} \quad \Leftrightarrow a = \sqrt[6]{\frac{1}{48}}$$