Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Analysis – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe I 1.1

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funkionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 2a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Abbildung 1 zeigt einen Graphen der Schar.

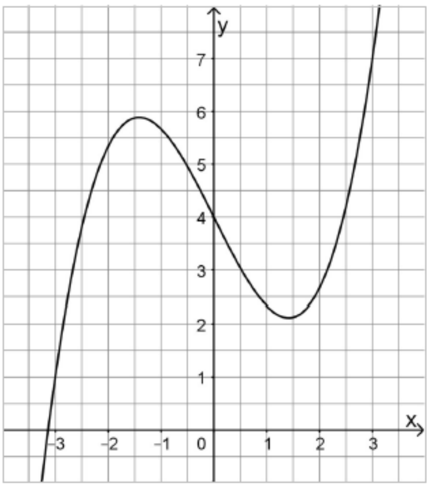

Abb. 1

a) Der abgebildete Graph verläuft durch den Punkt P(0|4). Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt. (2 BE)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. (5 BE)

c) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^2 f_a(x)dx = 0$ gilt. (4 BE)

Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4$.

Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abbildung 1 zeigt somit den Graphen von f. Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts (0|4).
Die Tangente an G_f im Punkt P(3|f(3)) wird mit t bezeichnet; $y = 7x - 14$ ist eine Gleichung von t.

d) Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass

$f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. (6 BE)

e) Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x)dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Für $-1{,}5 \le k \le 1{,}5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung. Untersuchen Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \ge 1{,}5$ besitzt.
(4 BE)

Aufgabe I 1.2

Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennwertreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet.
Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall [-12;36] durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in °C und r(x) der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite.
Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion r.
Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert 0,6, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur 60% seiner Nennreichweite.

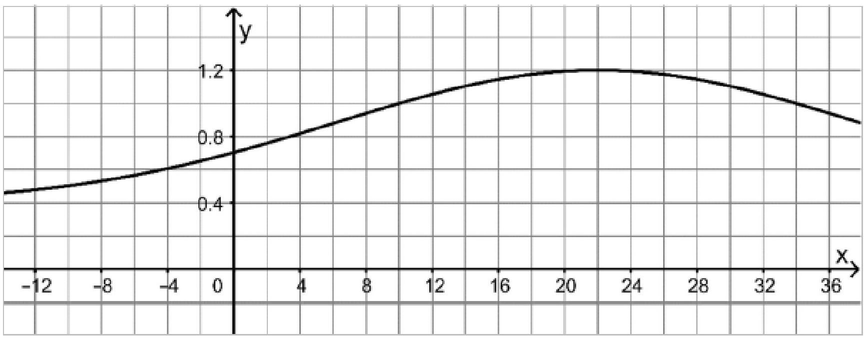

Abb. 2

Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von -12°C bis 36°C sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt.

a) Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang. (4 BE)

b) Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt 320 km, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt 500 km. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von 0°C. (5 BE)

Lösungen

Aufgabe I 1.1

a) *Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt.*

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass der abgebildete Graph aus der Funktionenschar stammt.

Wenn P(0|4) auf dem Schaubild liegt, muss gelten: $f_a(0)=4 \Leftrightarrow 2a=4 \Leftrightarrow a=2$

b) *Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.*

Wegen $f_a(x)=\frac{1}{3}x^3-ax+2a$ folgt $f_a'(x)=x^2-a$ und $f_a''(x)=2x$ und $f_a'''(x)=2$.
Hinreichende Bedingung für die Wendestelle: $f_a''(x)=0$ und $f_a'''(x)\neq 0$
$2x=0 \Leftrightarrow x=0$
$f_a'''(0)=2\neq 0$
Es gilt $f_a(0)=2a$
Somit besitzt der Graph von f_a einen Wendepunkt W(0|2a).

c) *Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^2 f_a(x)dx=0$ gilt.*

$$\int_0^2 f_a(x)dx=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}ax^2+2ax\right]_0^2=\frac{4}{3}-2a+4a-0=\frac{4}{3}+2a$$

Bedingung: $\frac{4}{3}+2a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$

d) *Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass $f(x)-(7x-14)=\frac{1}{3}\cdot(x-3)^2\cdot(x+6)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.*

Linke Seite der Termumformung:
$$f(x)-(7x-14)=\frac{1}{3}x^3-2x+4-(7x-14)=\frac{1}{3}x^3-9x+18$$

Rechte Seite der Termumformung:
$$\frac{1}{3}\cdot(x-3)^2\cdot(x+6)=\frac{1}{3}\cdot\left(x^2-6x+9\right)\cdot\left(x+6\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(x^3+6x^2-6x^2-36x+9x+54\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(x^3-27x+54\right)=\frac{1}{3}x^3-9x+18$$
Damit ist der Nachweis erbracht.

Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen.

Bedingung für Berechnung des gemeinsamen Punktes: $f(x) = 7x - 14$

Daraus folgt $f(x) - (7x - 14) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6) = 0$
Lösung der Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt:
$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (dies ist der x-Wert von Punkt P)
$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ (dies ist der x-Wert eines weiteren gemeinsamen Punktes, was zu begründen war)

e) *Untersuchen Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für* $k \geq 1{,}5$ *besitzt.*

Das Integral $\int_k^{k+1} f(x)dx$ entspricht für $k \geq 1{,}5$ dem Inhalt des Flächenstücks zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $k \leq x \leq k+1$; dieses erstreckt sich also jeweils auf einen Streifen der Breite 1.

Aus der Abbildung 1 erkennt man durch Abzählen der Kästchen:
Für k = 1,5 ist der Wert des Integrals kleiner als 4.
Für k = 2,5 ist der Wert des Integrals größer als 4.

Da mit wachsendem k der Wert des Integrals ansteigt, gibt es für $1{,}5 < k < 2{,}5$ somit genau eine Lösung für k, bei dem das Integral den Wert 4 annimmt.
da die Fläche zwischen der x-Achse und G_f wächst.

Aufgabe I 1.2

a) *Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang.*

Der Hochpunkt hat die Koordinaten H(22|1,2)

Interpretation: Die größte tatsächliche Reichweite liegt bei einer Außentemperatur von 22°C vor. Diese größte tatsächliche Reichweite beträgt das 1,2-fache der Nennreichweite.

b) *Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von 0°C.*

Es gilt $r(0) \approx 0{,}7$
Tatsächliche Reichweite von Elektroauto B: $500 \cdot 0{,}7 = 350$ km

Tatsächliche Reichweite von Elektroauto A bei einer Außentemperatur von x:
$320 \cdot r(x)$

Bedingung: $320 \cdot r(x) = 350 \Leftrightarrow r(x) \approx 1{,}1$

Dieser Wert wird laut der Abbildung 2 erreicht bei einer Außentemperatur von ca. 14°C oder 30°C.