

Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil A - Wahlaufgaben

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe W1: (5 BE)

Für jedes $a > 0$ ist eine in \mathbb{R} definierte Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = x \cdot e^{\frac{x}{a}}$.

Der Graph jeder Funktion f_a besitzt einen Extrempunkt E_a . Weisen Sie nach, dass es eine Ursprungsgerade gibt, auf der alle Punkte E_a liegen.

Aufgabe W2: (2 BE und 3 BE)

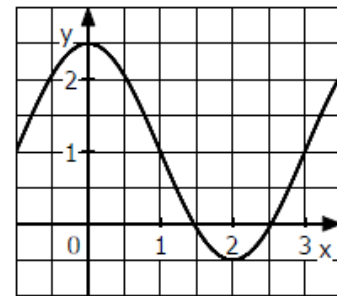
Abgebildet ist der Graph der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + b$; dabei sind a und b reelle Zahlen.

a) Geben Sie die Werte von a und b an.

b) Gegeben ist die Funktion J_0 durch $J_0(x) = \int_0^x f(t) dt$

mit $x \in]0; \infty[$.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von J_0 keinen Schnittpunkt mit der x -Achse hat.

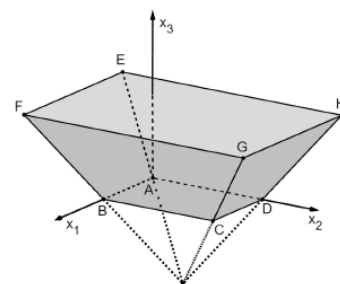
**Aufgabe W3: (5 BE)**

Die Punkte $A(8|0|0)$, $B(0|6|0)$ und $C(4|3|10)$ sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis \overline{AB} . Das Dreieck ABC wird so um die Achse AB gedreht, dass der entstehende Punkt C^* in der x_1x_2 -Ebene liegt.

Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes C^* .

Aufgabe W4: (1 BE und 4 BE)

Der abgebildete Körper $ABCDEFGH$ ist Teil einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche $EFGH$. Die Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ liegen in zwei zueinander parallelen Ebenen mit dem Abstand 5. Der Flächeninhalt von $EFGH$ ist viermal so groß wie der von $ABCD$. Es gilt: $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|6|0)$ und $D(0|6|0)$.



a) Geben Sie eine Gleichung einer der beiden Symmetrieebenen des Körpers $ABCEFGH$ an.

b) Begründen Sie, dass die Koordinaten des Punktes F mit folgendem Term ermittelt werden können:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe W5: (2 BE und 3 BE)

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

- a) Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X = 10) = P(X = 15)$ ist.
- b) Nun wird der Würfel n -mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5.“

Aufgabe W6: (5 BE)

Zu einem Zufallsexperiment werden zwei stochastisch unabhängige Ereignisse A und B betrachtet. Es gilt $P(B) = P(A) + 0,6$ sowie $P(A \cap \bar{B}) = 0,04$.
Bestimmen Sie $P(A)$.

Lösungen**Aufgabe W1:**

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: $f'_a(x) = 0$

Wegen $f_a(x) = x \cdot e^{\frac{x}{a}}$ gilt $f'_a(x) = 1 \cdot e^{\frac{x}{a}} + x \cdot e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} = e^{\frac{x}{a}} \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)$

$$e^{\frac{x}{a}} \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0$$

Satz vom Nullprodukt: $1 + \frac{x}{a} = 0 \Leftrightarrow a + x = 0 \Leftrightarrow x = -a$

Die Kontrolle der zweiten Ableitung ist nicht erforderlich, da laut Aufgabenstellung ein Extrempunkt existiert.

Wegen $f_a(-a) = -a \cdot e^{-1}$ lautet der Extrempunkt $E_a(-a \mid -a \cdot e^{-1})$ oder $E_a(-a \mid -\frac{a}{e})$.

Nachweis, dass die Extrempunkte E_a auf einer Ursprungsgeraden liegen:

Der x-Wert von E_a lautet $x = -a$. Daraus folgt $a = -x$

Der y-Wert von E_a lautet $y = -a \cdot e^{-1}$ (*).

Setzt man $a = -x$ in (*) ein ergibt sich $y = x \cdot e^{-1}$ bzw. $y = e^{-1} \cdot x$.

Die Gerade $y = e^{-1} \cdot x$ ist eine Ursprungsgerade.

Aufgabe W2:

a) Es gilt $b = 1$ (Höhe der waagrechten Mittellinie) und $a = 1,5$ (Amplitude).

b) $J_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von f

und der x-Achse an. Aus der Abbildung erkennt man, dass die Teilfläche zwischen der y-Achse und der ersten positiven Nullstelle von f größer ist als die nachfolgende Fläche zwischen der ersten und zweiten positiven Nullstelle unterhalb der x-Achse.

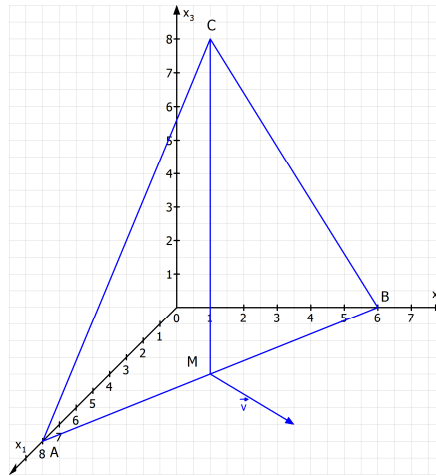
Somit ist der Integralwert zwischen $x = 0$ und der zweiten positiven Nullstelle positiv.

Da der Graph von f periodisch ist, setzt sich diese Logik fort.

Daher gilt $J_0(x) > 0$ und der Graph von J_0 besitzt im Intervall $]0; \infty[$ keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Aufgabe W3:

Skizze:



Mittelpunkt M der Basis AB: $M\left(\frac{8+0}{2} \mid \frac{6+0}{2} \mid \frac{0+0}{2}\right)$ und somit $M(4|3|0)$.

Wegen $\overline{MC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ besitzt die Höhe des Dreiecks die Länge 10.

Der in der Abbildung eingezeichnete Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt in der x_1x_2 -Ebene und ist

orthogonal zum Vektor $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit gilt: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -8a + 6b = 0$

Eine mögliche Lösung ist $b = 4$ und $a = 3$, also $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{v}| = \sqrt{9+16+0} = 5$.

Da der Vektor \overline{MC}^* die Länge 10 haben muss folgt:

$\overline{OC}^* = \overline{OM} + 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $C^*(10|11|0)$.

Eine weitere Lösung wäre

$\overline{OC}^* = \overline{OM} - 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $C^*(-2|-5|0)$.

Aufgabe W4:

- a) Eine mögliche Symmetrieebene ist $x_1 = 2$.
Eine zweite Symmetrieebene wäre $x_2 = 3$.

- b) Mittelpunkt des Rechtecks ABCD entspricht dem Mittelpunkt der Strecke \overline{AC} :
 $M\left(\frac{4+0}{2} \mid \frac{6+0}{2} \mid 0\right)$ bzw. $M(2|3|0)$

Da das Rechteck EFGH 5 Längeneinheiten (in x_3 -Richtung) vom Rechteck ABDE entfernt ist, lautet der Mittelpunkt des Rechtecks EFGH $M^*(2|3|5)$.

Aus der Abbildung erkennt man, dass das Rechteck EFGH aus einer zentrischen Streckung des Rechtecks ABCD mit dem Streckfaktor k entstammt (Streckzentrum = Spitze der Pyramide).

Da sich die Fläche vervierfacht hat, gilt $k^2 = 4$ und somit $k = 2$.
Das heißt jede Strecke im Rechteck ABCD ist beim Rechteck EFGH doppelt so lang.

Daraus folgt: $\overline{OF} = \overline{AF} = \overline{AM^*} + 2 \cdot \overline{MB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ was zu zeigen war.

Aufgabe W5:

- a) Jedes Zahlenpaar beim zweimaligen Würfeln hat dieselbe Wahrscheinlichkeit.
Somit muss nur geprüft werden, wie viele Möglichkeiten es für das Produkt $X = 10$ und für das Produkt $X = 15$ gibt.

$$P(X = 10) = P((2;5);(5;2)) \text{ also 2 Möglichkeiten}$$

$$P(X = 15) = P((3;5);(5;3)) \text{ also 2 Möglichkeiten}$$

$$\text{Somit gilt } P(X=10) = P(X=15).$$

- b) Das Produkt ist „2“, wenn einmal eine „2“ und $n-1$ mal die „1“ gewürfelt wird.
Die Zahl „2“ darf dabei an einer beliebigen der n Würfe fallen.

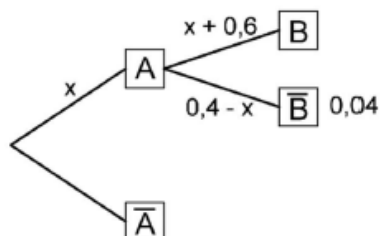
$$P(\text{Produkt ist 2}) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot n$$

Die gleiche Logik gilt für das Produkt „3“ und „5“.

$$P(\text{Produkt ist 2, 3 oder 5}) = 3 \cdot P(\text{Produkt ist 2}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot n$$

Aufgabe W6:

Es sei $x = P(A)$.



$$P(B) = P(A) + 0,6 \Leftrightarrow P(B) = x + 0,6$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - (x + 0,6) = 0,4 - x$$

Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, sind auch die Ergebnisse A und \bar{B} stochastisch unabhängig.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = x \cdot (0,4 - x) = 0,04$$

$$\Leftrightarrow 0,4x - x^2 = 0,04$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 0,4x + 0,04 = 0$$

$$\Leftrightarrow 100x^2 - 40x + 4 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{50} = \frac{1}{5}$$

Es gilt $P(A) = \frac{1}{5}$