Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil A - Pflichtaufgaben

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

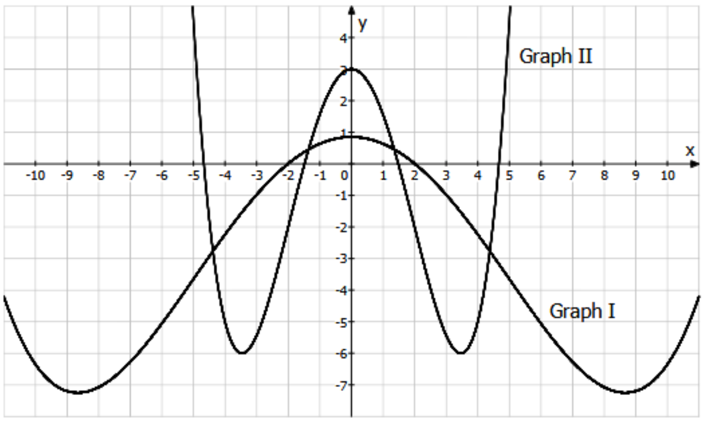
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe P1: (3 BE und 2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

a) Es gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist.
b) Einer der abgebildeten Graphen I und II ist der Graph einer Stammfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.

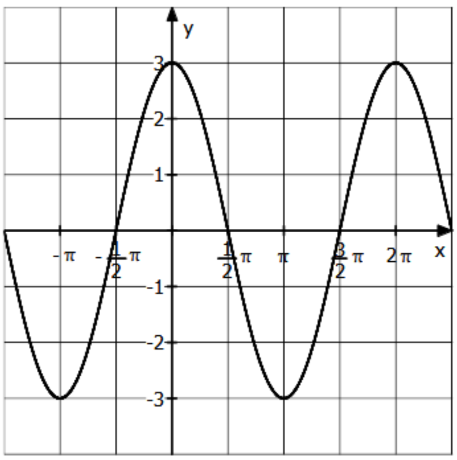


Aufgabe P2: (1 BE und 4 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$

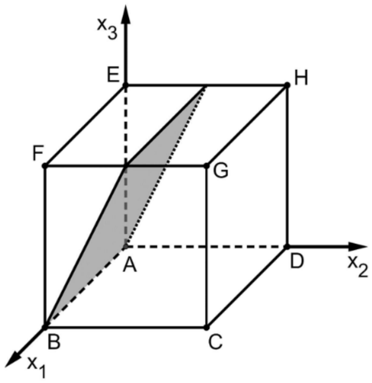
a) Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\pi} f(x)dx$ an.

b) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. Die Punkte (0|-3) und $\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{3}{4}\pi\right)$ liegen auf dem Graphen von g. Ermitteln Sie a und b.



Aufgabe P3: (2 BE und 3 BE)

Die Abbildung zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen. Die Ebene K enthält Punkte A(0|0|0), B(4|0|0) und den Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$.



a) Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

b) Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung in der Anlage ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an.

Aufgabe P4: (2 BE und 3 BE)

Bei einem Spiel wird ein Würfel zweimal geworfen. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei keinem der Würfe die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{25}{36}$ beträgt.

b) Der Einsatz bei diesem Spiel beträgt 2 Euro. Je nachdem, wie oft dabei die Zahl 3 erzielt wird, werden folgende Auszahlungen getätigt:

Anzahl der Würfe, bei denen die Zahl 3 erzielt wird	0	1	2
Auszahlung in Euro	0	5	x

Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Ermitteln Sie den Wert von x.

Lösungen

Aufgabe P1:

a) Aus $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ folgt $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3$ und $f''(x)=\frac{3}{2}x$.

Es gilt $f'(2)=\frac{3}{4}\cdot 2^2-3=3-3=0$, somit existiert bei x = 2 ein Punkt mit waagrechter Tangente.
Wegen $f''(2)\neq 0$ existiert bei x = 2 eine Extremstelle.

b) Das Schaubild von f existiert bei x = 2 eine Extremstelle.
Das Schaubild der Stammfunktion F von f besitzt somit bei x = 2 eine Wendestelle. Daher ist der Graph II der Graph einer Stammfunktion F von f.

Aufgabe P2:

a) Es gilt $\int_0^{\pi} f(x)dx=0$, da die Flächen zwischen dem Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse und oberhalb der x-Achse gleich groß sind.

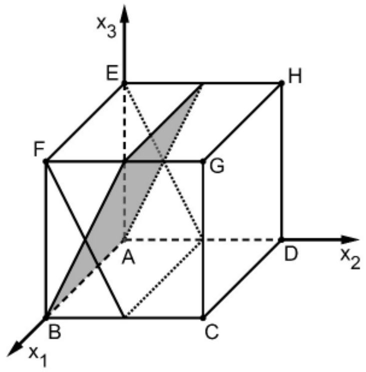
b) Es gilt $g(x)=3a\cdot\cos(x)+b\cdot x$.

Bedingung:
$g(0)=-3\Rightarrow 3a\cdot\cos(0)+b\cdot 0=-3\Leftrightarrow 3a=-3\Leftrightarrow a=-1$
$g(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}\pi\Rightarrow 3a\cdot\cos(\frac{\pi}{2})+b\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi\Leftrightarrow b\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi\Leftrightarrow b=\frac{3}{2}$

Aufgabe P3:

a) Der kleinere Teilkörper ist ein Dreiecksprisma mit der Volumenformel $V=G\cdot h$.
Die Grundfläche G ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Inhalt $G=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$.
Die Höhe des Prismas ist $h=\overline{EF}=4$.
$V_{Prisma}=4\cdot 4=16$

b) Zeichnung der Ebene L:



Die Schnittgerade g enthält die Punkte K(0|1|2) und die Punkte L(4|1|2).

Gleichung der Schnittgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe P4:

a) Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf keine „3“ zu erzielen beträgt $\frac{5}{6}$.

Die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen keine „3“ zu erzielen beträgt $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

b) Die Zufallsgröße X gibt die Auszahlung an den Spieler an.

P(X=0) = P(keine „3“) = $\frac{25}{36}$

P(X=x) = P(zweimal „3“) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

P(X=5) = P(genau einmal „3“) = $1 - \frac{25}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Berechnung der erwarteten Auszahlung:

$E(X) = 0 \cdot \frac{25}{36} + x \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{5}{18} = \frac{1}{36}x + \frac{25}{18}$

Bedingung: $E(X) = 2$ Euro

$\frac{1}{36}x + \frac{25}{18} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{36}x = \frac{11}{18} \Leftrightarrow x = 22$