Hauptprüfung Abiturprüfung 2025 grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra

(a) 3 BE b) 2 BE c) 3 BE d) 3 BE e) 4 BE)

Die Form eines Schirms für eine Stehlampe wird durch die Punkte A(0|0|0), B(4|0|0), C(4|4|0), D(0|4|0), E(1|1|8), F(3|1|8), G(3|3|8) und H(1|3|8) beschrieben.
Eine Längeneinheit entspricht 10cm.

a) Zeichnen Sie den Lampenschirm in ein Koordinatensystem ein.

b) Zeigen Sie, dass die Seitenfläche ADHE ein Trapez ist.

c) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Die Kante BF schließt mit der $x_1 - x_2$-Ebene einen Winkel von mehr als 81° ein.

d) Zur Stabilisierung sollen im Inneren des Lampenschirms dünne Stäbe angebracht werden.
Formulieren Sie in dieser Anwendungssituation eine Aufgabenstellung, die sich mit folgendem Ansatz lösen lässt:

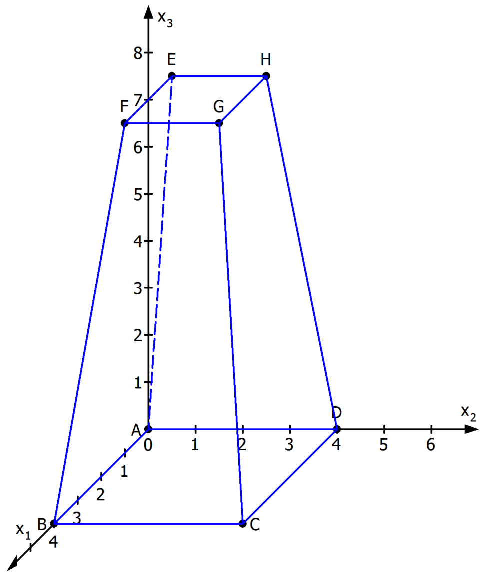
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}; \; s,t \in [0;1]$$

e) Im Lampenschirm soll eine LED-Lampe installiert werden. Diese soll von allen Eckpunkten den gleichen Abstand haben. Die LED-Lampe wird vereinfacht als punktförmig angenommen.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Lösungen

3 Lineare Algebra

a) Zeichnung:



b) Ein Viereck ist ein Trapez, wenn ein Seitenpaar parallel ist.

Kontrolle, ob die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{EH}$ parallel sind:

Da die Vektoren $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vielfache zueinander sind, ergibt sich daraus die Parallelität der Vektoren und damit auch die Parallelität der Seiten.

c) Winkel zwischen der Kante BF und der $x_1 - x_2$-Ebene:

Es gilt $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{2}}\right) \approx 79{,}98°$$

Der Winkel ist also kleiner als 81°.

d) Die linke Seite der Gleichung stellt eine Strecke dar, da $s \in [0;1]$ ist.
Für s = 0 ergibt sich der Punkt B(4|0|0) und für s = 1 der Punkt H(1|3|8).
Somit ist die linke Seite die Gleichung der Strecke $\overline{BH}$.

Die rechte Seite der Gleichung stellt eine Strecke dar, da $t \in [0;1]$ ist.
Für t = 0 ergibt sich der Punkt C(4|4|0) und für t = 1 der Punkt E(1|1|8).
Somit ist die rechte Seite die Gleichung der Strecke $\overline{CE}$.

Aufgabenstellung:
Bestimme den Schnittpunkt der beiden Stäbe, die die Punkte B und H bzw. die Punkte C und E verbinden.

e) Aus Symmetriegründen hat der gesuchte Punkt die Koordinaten P(2|2|z).

Bedingung um den Wert von z zu bestimmen:

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{PF}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8-z \end{pmatrix}\right| \Rightarrow \sqrt{4+4+z^2} = \sqrt{1+1+(8-z)^2} \quad |\text{quadrieren}$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 8 = 2 + 64 - 16z + z^2$$

$$\Leftrightarrow 8 = 66 - 16z \Leftrightarrow z = \frac{29}{8}$$

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $P(2\,|\,2\,|\,\frac{29}{8})$.