# Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
# grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

# Baden-Württemberg

## Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 1

**Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe**

**berufliche Gymnasien**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

## 3 Lineare Algebra

**a) 3 BE b) 4 BE c) 2 BE d) 2 BE e) 4 BE)**

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $r \in \mathbb{R}$ und die Punkte A(5|-1|4), B(1|1|0) und C(0|3|2).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von g mit den Koordinatenebenen.

b) h ist die Gerade durch A und B.
Zeigen Sie, dass g und h zueinander windschief sind.

c) Geben Sie eine Gleichung einer Ebene an, die parallel zur $x_1 - x_3$-Ebene ist und von C den Abstand 2 hat.

Es gilt: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

d) Erläutern Sie, welche geometrische Größe durch den Term $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|$ berechnet wird.

e) Es gibt genau einen Kreis, auf dem die Punkte A, B und C liegen.
Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt dieses Kreises auf der Hypotenuse des Dreiecks ABC liegt.

## Lösungen

### 3 Lineare Algebra

a) Schnittpunkt mit der $x_1 - x_2$-Ebene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aus der 3.Zeile folgt r = -5.
Daraus ergibt sich als Schnittpunkt $S_{12} = (-6 \,|\, -2 \,|\, 0)$

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_3$-Ebene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aus der 2.Zeile ergibt sich ein Widerspruch.
Die Gerade g ist daher parallel zur $x_1 - x_3$-Ebene.

Schnittpunkt mit der $x_2 - x_3$-Ebene: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile folgt r = 1.
Daraus ergibt sich als Schnittpunkt $S_{23} = (0 \,|\, -2 \,|\, 6)$

b) Gleichung der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die Geraden g und h sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren keine Vielfachen zueinander sind.

Durch Gleichsetzen der Geraden wird geprüft, ob die Geraden windschief sind:

$$\begin{array}{rrcrr} -1 & +r & = & 5 & -4s \\ -2 & & = & -1 & +2s \\ 5 & +r & = & 4 & -4s \end{array}$$

Aus der 2.Zeile folgt s = -0,5.
Aus der 1.Zeile folgt $-1 + r = 5 + 2 \Leftrightarrow r = 8$
Probe mit der 3.Zeile: $5 + 8 = 4 - 4 \cdot (-0{,}5) \Leftrightarrow 13 = 6$

Da sich aus der 3.Zeile ein Widerspruch ergibt schneiden sich g und h nicht.
Somit sind die Geraden g und h zueinander windschief.

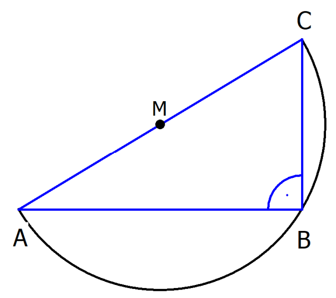
c) Wenn die Ebene parallel zur $x_1 - x_3$-Ebene ist und von C(0|3|2) einen Abstand von 2 hat, müssen alle Punkte der gesuchten Ebene entweder die $x_2$-Koordinate 3-2 = 1 oder die $x_2$-Koordinate 3 + 2 = 5.

Mögliche Ebenengleichungen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Spannvektoren ergeben sich aus der Parallelität der Ebene zur $x_1 - x_3$-Ebene.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ bedeutet, dass das Dreieck ABC im Punkt B einen rechten Winkel besitzt.
Mit der Formel $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|$ wird der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ermittelt.




e) Der Kreis, auf dem die Punkte A, B und C liegen nennt man den Umkreis des Dreiecks.
Da das Dreieck rechtwinklig im Punkt B ist, liegt der Mittelpunkt M des Kreises auf dem Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{AC}$, da der Umkreis dem Thaleskreis des Dreiecks entspricht (siehe Halbkreis in der Skizze bei d)).