

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

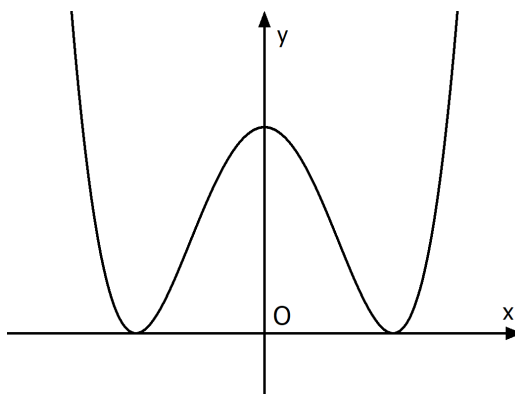
1 Analysis

1.1 (a) 3 BE b) 1 BE c) 3 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g durch $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$.

Der Graph von g ist K_g .

- a) Nennen Sie drei Argumente, warum es sich beim dargestellten Graphen um K_g handeln kann.



Der Graph K_f der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$ geht aus K_g durch Streckung in y -Richtung mit dem Faktor a hervor.

- b) Geben Sie den Wert von a an.
- c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Parabel (zweiten Grades), die durch alle Extrempunkte von K_f verläuft.

1.2 (a) 3 BE b) 3 BE c) 5 BE

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot \cos(x) + 4$.

Ihr Graph ist K_h .

- a) Zeichnen Sie K_h im Bereich $-\pi \leq x \leq \pi$.
- b) Zeigen Sie, dass die Gerade t mit der Gleichung $y = -4x + 2\pi + 4$ eine Tangente an den Graphen K_h im Punkt $P(\frac{\pi}{2} | 4)$ ist.
- c) Die Tangente im Kurvenpunkt $P(u | h(u))$, $0 \leq u \leq \pi$, schneidet die y -Achse im Punkt S .
Bestimmen Sie denjenigen Wert, den die y -Koordinate von S maximal annehmen kann.

1.3 (a) 3 BE b) 4 BE)

Ein Notizzettel hat die Maße 9 x 9 cm. Von diesem Notizzettel wird nun immer wieder ein Stück abgeschnitten, sodass sich der Flächeninhalt A des verbleibenden Stücks mit jedem Schnitt halbiert.

- a) Zeigen Sie, dass sich der nach n Schnitten verbleibende Flächeninhalt des Notizzettels in cm^2 durch die Funktion A mit

$$A(n) = 81 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n ; n \in \mathbb{N}$$

beschreiben lässt.

- b) Berechnen Sie, wie oft man ein Stück des Notizzettels abschneiden muss, bis das verbleibende Stück erstmals einen Flächeninhalt von weniger als einem hundertstel Quadratzentimeter hat.

Lösungen**1 Analysis****1.1**

- a) 1.) Die Funktion $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$ hat bei $x = -2$ eine doppelte Nullstelle.
 2.) Die Funktion $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$ hat bei $x = 2$ eine doppelte Nullstelle.
 3.) Die Funktion $g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2 = x^4 + \dots$ ist eine Funktion 4. Grades, für die gilt: Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$
 4.) Die Funktion

$$g(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2 = [(x+2)(x-2)]^2 = [x^2 - 4]^2 = x^4 - 8x^2 + 16$$

hat bei x nur gerade Exponenten, sodass das Schaubild von g symmetrisch zur y -Achse ist.

(es genügen 3 Argumente)

- b) Da bei der Funktion $f(x)$ vor x^4 die Zahl $\frac{1}{8}$ steht, gilt $f(x) = \frac{1}{8} \cdot g(x)$.

Daher ist $a = \frac{1}{8}$.

- c) Aus dem abgebildeten Graphen können die 3 Extrempunkte von K_g abgelesen werden: $T_1(-2|0)$ und $T_2(2|0)$ und wegen $g(0) = 16$ der Hochpunkt $H(0|16)$.

Die Extrempunkte von $f(x) = \frac{1}{8} \cdot g(x)$ können daraus ermittelt werden.

Die Streckung in y -Richtung hat auf die Tiefpunktkoordinaten keine Auswirkung.

Der Hochpunkt von K_f hat den y -Wert $f(0) = \frac{1}{8} \cdot g(0) = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$, somit hat K_f den Hochpunkt $H(0|2)$.

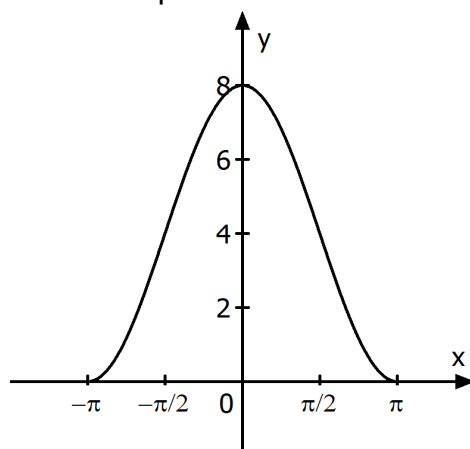
Die quadratische Funktion p hat damit die Nullstellen $x = 2$ und $x = -2$ und hat die Bauart $p(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

Es gilt: $p(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot 2 \cdot (-2) \Leftrightarrow a = -0,5$

Die Funktionsgleichung lautet $p(x) = -0,5(x+2)(x-2) = -0,5x^2 + 2$.

1.2

- a) Das Schaubild K_h hat eine waagrechte Mittellinie auf der Höhe $d = 4$ und die Amplitude $a = 4$ sowie die Periode $p = 2\pi$.



- b) Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + c$

Es gilt $h'(x) = -4 \sin(x)$

Steigung der Tangente: $h'(\frac{\pi}{2}) = -4$

Einsetzen der Steigung und des gegebenen Punktes P in den obigen Ansatz:

$$4 = -4 \cdot \frac{\pi}{2} + c \quad \Leftrightarrow c = 4 + 2\pi$$

Gleichung der Tangente: $y = -4x + 4 + 2\pi$ was zu zeigen war

- c) Der y-Wert von S wird dann maximal, wenn die Tangente am steilsten ist (negativ steil).

Hierbei ist die Tangente am Wendepunkt am steilsten.

Der Wendepunkt der Funktion f befindet sich auf der Höhe der Mittellinie des

Schaubilds ($d = 4$), somit ist der Punkt $P(\frac{\pi}{2} | 4)$ aus Teil b) ein Wendepunkt von f.

Wegen $c = 4 + 2\pi$ aus Teil b) hat die Tangente im Wendepunkt P den y-Achsenabschnitt $c = 4 + 2\pi$ und dies entspricht dem maximalen Wert von S.

1.3

- a) Nach 0 Schnitten ist der Flächeninhalt $A(0) = 9 \cdot 9 = 81$.

Nach 1 Schnitt ist der Flächeninhalt $A(1) = 81 \cdot \frac{1}{2}$.

Nach 2 Schnitten ist der Flächeninhalt $A(2) = 81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 81 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Nach 3 Schnitten ist der Flächeninhalt $A(3) = 81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 81 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Nach n Schnitten ist der Flächeninhalt daher $A(n) = 81 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Es soll gelten: $81 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \quad |: 81$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{8100}$$

Durch Ausprobieren mit dem TR ergibt sich: $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{4096}$ und $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1}{8192}$

Nach 13 Schnitten ist die Fläche kleiner als ein hundertstel Quadratzentimeter.