Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

1 Analysis

(a) 4 BE b) 3 BE c) 4 BE d) 3 BE e) 6 BE f) 5 BE)

Der Graph K_g einer in $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktion g schneidet die y-Achse im Punkt $S_y(0\,|\,1)$. In diesem Punkt hat K_g die Steigung $-\frac{4}{3}$. Der Tiefpunkt von K_g hat die x-Koordinate 2.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion g.
(zur Kontrolle: $g(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+1$)

b) Zeichnen Sie K_g im Bereich $-2\le x\le 6$.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_g mit der x-Achse einschließt.

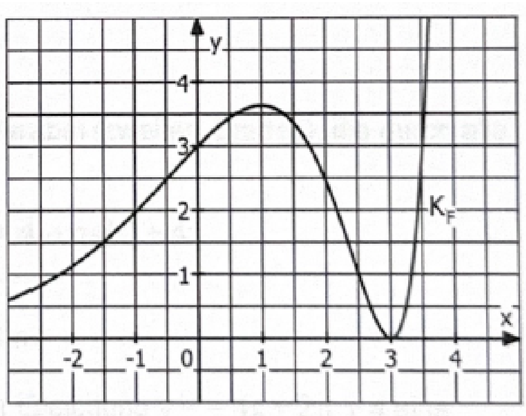
Die Funktion f ist für $x\in\mathbb{R}$ definiert durch $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+1\right)\cdot e^x$.

Der Graph von f ist K_f.

Die Funktion F ist für $x\in\mathbb{R}$ definiert durch $F(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(x^2-6x+9\right)\cdot e^x$.

d) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

e)
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen K_F der Funktion F.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils mithilfe von K_F.



(1) K_f schneidet die x-Achse im Intervall [-2;2] zweimal.

(2) Es gilt: $F'(2{,}5)=-1$

(3) Es gilt: $f'(1{,}5)<0$

Der Graph der Funktion h entsteht, indem K_f zuerst um 1 nach rechts verschoben und dann an der y-Achse gespiegelt wird.

f) Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen korrekt sind:

(1) Die Reihenfolge der beiden Transformationen spielt eine Rolle.
(2) Es gilt f(1) = 0. Damit ist h(-2) = 0.

Lösungen

1 Analysis

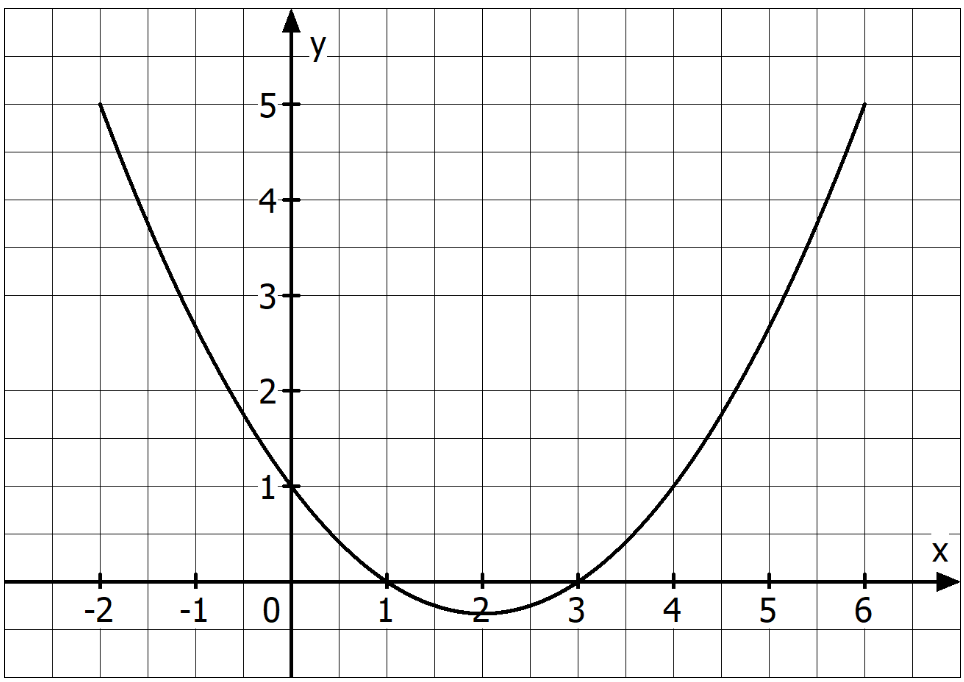
a) Ansatz für die Funktionsgleichung: $g(x) = ax^2 + bx + c$
Daraus folgt $g'(x) = 2ax + b$

Bedingungen:

- $S_y(0\,|\,1)$ liegt auf dem Schaubild: $g(0) = 1 \Rightarrow c = 1$
- Steigung $-\frac{4}{3}$ im Punkt $S_y(0\,|\,1)$: $g'(0) = -\frac{4}{3} \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$
- Tiefpunkt hat x-Koordinate 2: $g'(2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

Die Funktionsgleichung von g lautet $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$.

b) Mit dem Taschenrechner kann man eine Wertetabelle von g erstellen, aus der sich die Punkte der Parabel ablesen lassen.



c) Flächeninhalt, den die Parabel mit der x-Achse einschließt:

$$\int_1^3 g(x)dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x\right]_1^3 = 3 - 6 + 3 - \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1\right) = -\frac{4}{9}$$

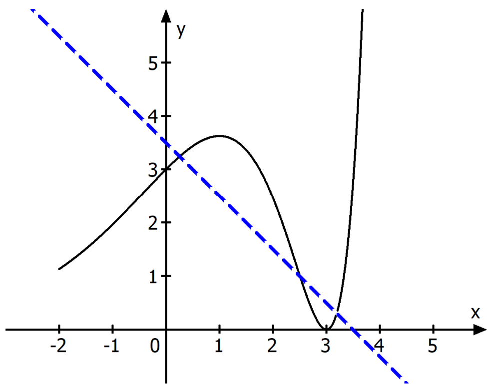
Der Flächeninhalt beträgt $A = \frac{4}{9}$.

d) F ist eine Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$ ist.

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left[(2x-6) \cdot e^x + \left(x^2 - 6x + 9\right) \cdot e^x \right]$$
$$= \frac{1}{3} e^x \cdot \left[2x - 6 + x^2 - 6x + 9 \right] = \frac{1}{3} e^x \cdot \left[x^2 - 4x + 3 \right]$$
$$= e^x \cdot \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{4}{3} x + 1 \right)$$

e) (1) Die Aussage ist falsch, da K_F im Intervall [-2;2] nur eine Stelle mit einer waagrechten Tangente besitzt (bei x = 1).

(2) Die Aussage ist falsch, da eine Gerade mit der Steigung m = -1 an der Stelle x = 2,5 (siehe gestrichelte Gerade) keine Tangente an das Schaubild K_F darstellt.



(3) Die Aussage ist wahr.
Es gilt $f'(1{,}5) = F''(1{,}5)$. Da das Schaubild von F bei x = 1,5 rechtsgekrümmt ist, gilt $F''(1{,}5) < 0$.

f) (1) Um die Korrektheit der Aussage zu prüfen, werden die beiden Transformationen in unterschiedlicher Reihenfolge durchgeführt:

1.Fall:

Erst Verschiebung um 1 nach rechts: $h^*(x) = \left(\frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{4}{3}(x-1) + 1 \right) e^{x-1}$

Dann Spiegelung an der y-Achse: $h(x) = \left(\frac{1}{3}(-x-1)^2 - \frac{4}{3}(-x-1) + 1 \right) e^{-x-1}$

2.Fall:

Erst Spiegelung an der y-Achse: $k^*(x) = \left(\frac{1}{3}(-x)^2 - \frac{4}{3}(-x) + 1 \right) e^{-x}$

Dann Verschiebung um 1 nach rechts: $k(x) = \left(\frac{1}{3}(-(x-1))^2 - \frac{4}{3}(-(x-1)) + 1 \right) e^{-(x-1)}$

Die beiden Funktionen h(x) und k(x) sind unterschiedlich.

(2) $f(1) = 0$ bedeutet, dass das Schaubild von f den Punkt $A(1|0)$ enthält.
Verschiebung um 1 nach rechts führt auf den Punkt $B(2|0)$.
Spiegelung an der y-Achse führt auf den Punkt $B^*(-2|0)$.
Somit liegt $B^*(-2|0)$ auf dem Schaubild von h und daraus folgt $h(-2)=0$.