

Analysis

Ganzrationale Funktionen: komplettes Stoffgebiet

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufliche Gymnasien: ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 4x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K .

- Untersuche K auf Schnittpunkte mit der x -Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K für $-1 \leq x \leq 3,5$ (LE 1cm).
- K begrenzt mit der Normalen im Koordinatenursprung $O(0/0)$ eine Fläche.
Berechne deren Inhalt A auf zwei Dezimalen.
- $P(u/v)$ sei ein Punkt auf K mit $0 < u < \sqrt[3]{32}$. Wie ist der Wert von u zu wählen, damit das Dreieck $P(u/v)$, $Q(u/0)$ und $O(0/0)$ einen maximalen Flächeninhalt A^* besitzt?

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Funktionen f_a durch $f_a(x) = 2x^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

K_a sei das Schaubild von f_a .

- Untersuche K_a auf Schnittpunkte mit der x -Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K_9 im Bereich $-2 \leq x \leq 9$.
- Auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte aller K_a ?
- Gegeben ist die Funktion $g(x) = cx^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.
Wie ist c zu wählen, damit das Schaubild von g im Bereich $0 \leq x \leq 6$ unterhalb von K_9 verläuft?

Lösungen**Aufgabe 1:**

a) Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{8}x^4 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 - 4\right) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } \frac{1}{8}x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[3]{32} \approx 3,17$$

Es gibt zwei Schnittpunkte: $N_1(0 / 0)$ und $N_2(\sqrt[3]{32} / 0)$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4 \quad f''(x) = 1,5x^2 \quad f'''(x) = 3x$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\frac{1}{2}x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$f''(2) = 6 > 0$, also existiert bei $x = 2$ ein Tiefpunkt $T(2 / f(2)) \rightarrow T(2 / -6)$

Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$1,5x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

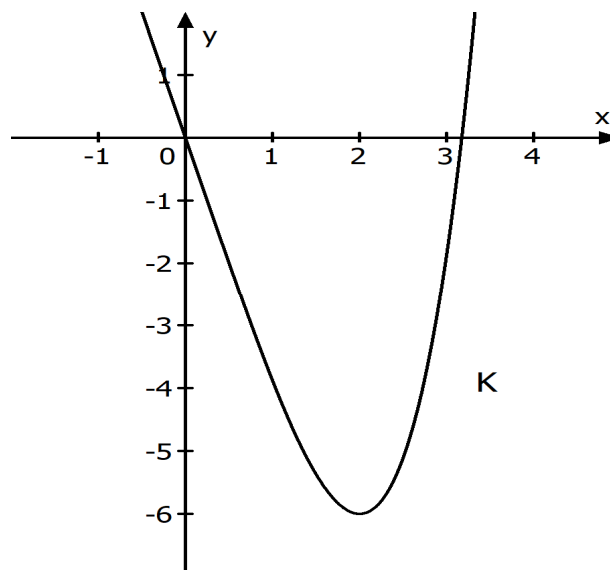
$f'''(0) = 0$, somit ist damit keine Aussage möglich.

Kontrolle mit dem Vorzeichenwechsel:

$$f''(-1) > 0 \text{ und } f''(1) > 0$$

Da kein VZW der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 0$ existiert, besitzt die Funktion keinen Wendepunkt.

Zeichnung:



b) Normale im Ursprung:

Ansatz: $y = mx + c$

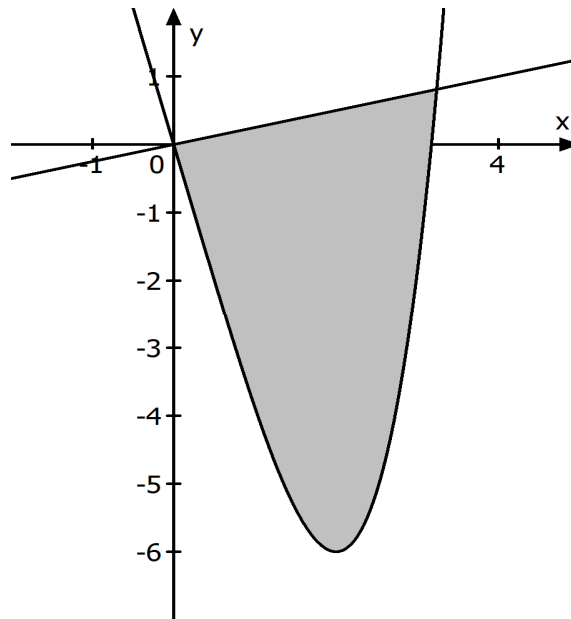
Steigung der Tangente bei $x = 0$: $f'(0) = -4$

Steigung der Normalen: $m_{\text{Normale}} = -\frac{1}{-4} = 0,25$

Einsetzen der Steigung und des Punktes $O(0/0)$ in die Geradengleichung:
 $0 = 0,25 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$

Gleichung der Normale: $y = 0,25x$

Gesuchte Fläche:



Schnittpunkt der Normale und des Schaubildes K von f:

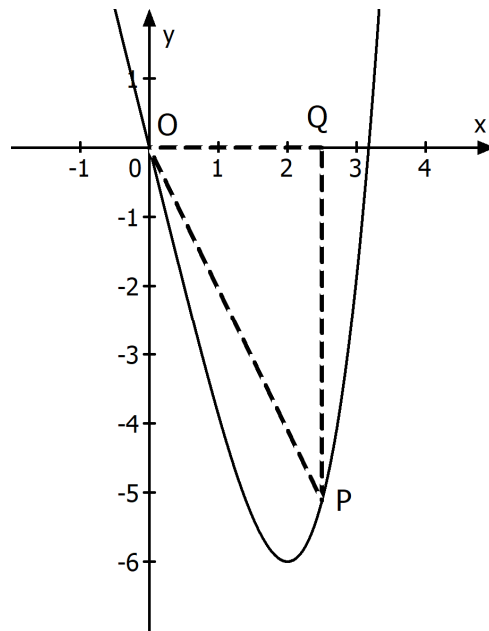
$$\frac{1}{8}x^4 - 4x = 0,25x \Rightarrow \frac{1}{8}x^4 - 4,25x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 - 4,25\right) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $\frac{1}{8}x^3 - 4,25 = 0 \Rightarrow x^3 = 34 \Rightarrow x = \sqrt[3]{34} \approx 3,24$

$$\begin{aligned} \text{Fläche: } A &= \int_0^{3,24} \left(0,25x - \left(\frac{1}{8}x^4 - 4x\right)\right) dx = \int_0^{3,24} \left(4,25x - \frac{1}{8}x^4\right) dx = \left[2,125x^2 - \frac{1}{40}x^5\right]_0^{3,24} \\ &= 13,38 - 0 = 13,38 \text{ FE} \end{aligned}$$

c) Skizze des Dreiecks:



Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks:

$P(u/f(u))$, $Q(u/0)$ und $O(0/0)$

$$\text{Fläche des Dreiecks: } A^*(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OP} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (u-0) \cdot (0-f(u)) = -\frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$$

$$\text{Zielfunktion: } A^*(u) = -\frac{1}{2} u \cdot \left(\frac{1}{8} u^4 - 4u \right) = -\frac{1}{16} u^5 + 2u^2 \quad \text{mit } 0 < u < \sqrt[3]{32}$$

Relatives Maximum:

$$\text{Es gilt } A^{*'}(u) = -\frac{5}{16} u^4 + 4u \quad \text{und} \quad A^{*''}(u) = -\frac{5}{4} u^3 + 4$$

Hinreichende Bedingung: $A^{*'}(u) = 0$ und $A^{*''}(u) < 0$

$$-\frac{5}{16} u^4 + 4u = 0 \Rightarrow u \cdot \left(-\frac{5}{16} u^3 + 4 \right) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $u = 0$

$$\text{Gleichung II): } -\frac{5}{16} u^3 + 4 = 0 \Rightarrow u^3 = 12,8 \Rightarrow u \approx 2,34$$

$A^{*''}(0) = 4 > 0$ also relatives Minimum

$A^{*''}(2,34) \approx -12 < 0$ also relatives Maximum mit $A^*(2,34) = 6,57$

Globales Maximum:

Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0 < 6,57$$

$$A(\sqrt[3]{32}) = 0 < 6,57$$

Damit existiert für $u = 2,34$ ein globales Maximum.

Aufgabe 2:a) Schnittpunkte mit der x-Achse: $f_a(x) = 0$

$$2x^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } 1 - \frac{x}{a} = 0 \Rightarrow a - x = 0 \Rightarrow x = a$$

Es gibt zwei Schnittpunkte: $N_1(0 / 0)$ und $N_2(a / 0)$

Ableitungen:

$$f_a(x) = 2x^2 - \frac{2x^3}{a}$$

$$f'_a(x) = 4x - \frac{6x^2}{a}$$

$$f''_a(x) = 4 - \frac{12x}{a}$$

$$f'''_a(x) = -\frac{12}{a}$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'_a(x) = 0$ und $f''_a(x) \neq 0$

$$4x - \frac{6x^2}{a} = 0 \Rightarrow 4ax - 6x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot (4a - 6x) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } 4a - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$$

 $f''_a(0) = 4 > 0$, also existiert ein Tiefpunkt $T(0 / f_a(0)) \rightarrow T(0 / 0)$

$$f''_a\left(\frac{2}{3}a\right) = 4 - \frac{12 \cdot \frac{2}{3}a}{a} = -4 < 0, \text{ also existiert ein Hochpunkt } H\left(\frac{2}{3}a / f_a\left(\frac{2}{3}a\right)\right) \rightarrow H\left(\frac{2}{3}a / \frac{8}{27}a^2\right)$$

Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''_a(x) = 0$ und $f'''_a(x) \neq 0$

$$4 - \frac{12x}{a} = 0 \Rightarrow 4a - 12x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}a$$

$$f'''_a\left(\frac{1}{3}a\right) = -\frac{12}{a} \neq 0, \text{ also existiert ein Wendepunkt } W\left(\frac{1}{3}a / f_a\left(\frac{1}{3}a\right)\right) \rightarrow W\left(\frac{1}{3}a / \frac{4}{27}a^2\right)$$

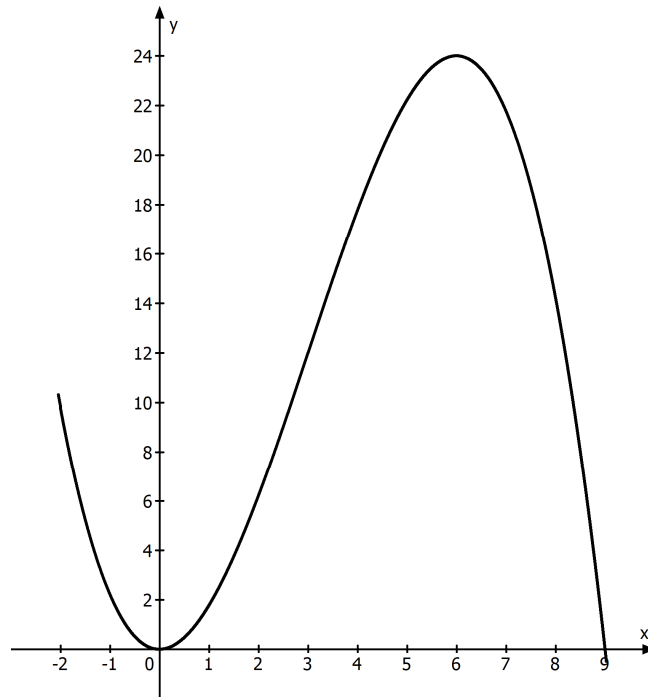
Zeichnung von $f_9(x) = 2x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}x\right)$

Mit $a = 9$ ergeben sich aus den berechneten Ergebnissen in a):

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0/0)$ und $N_2(9/0)$

Extrempunkte: $T(0/0)$ und $H(6/24)$

Wendepunkt: $W(3/12)$



b) Kurve, auf der die Wendepunkte liegen:

Der allgemeine Wendepunkt hat die Koordinaten $W\left(\frac{1}{3}a / \frac{4}{27}a^2\right)$

Es gilt:

$$x = \frac{1}{3}a \quad (*) \quad \text{und} \quad y = \frac{4}{27}a^2 \quad (**)$$

Aus (*) folgt $a = 3x$

$$\text{Eingesetzt in (**) folgt } y = \frac{4}{27} \cdot (3x)^2 = \frac{4}{3}x^2$$

Die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte lautet $y = \frac{4}{3}x^2$.

c) Die Funktion $g(x) = cx^2$ mit $c > 0$ ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Damit die Parabel die in der Aufgabe genannte Bedingung erfüllt, muss die Parabel das Schaubild K_9 an den Stellen $x = 0$ und $x = 6$ schneiden.

Es gilt $f_9(0) = 0$ und $g(0) = 0$.

Das heißt, die Schaubilder schneiden sich immer bei $x = 0$.

Bedingung: $f_g(6) = g(6)$

$$2 \cdot 6^2 \cdot \left(1 - \frac{6}{9}\right) = c \cdot 6^2$$

$$\Rightarrow 24 = c \cdot 36 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$