Hauptprüfung Abiturprüfung 2025
Grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

Baden-Württemberg

Teil A – Wahlaufgaben (A4-A5) / Problemlöseaufgabe (A6)

Hilfsmittel:
A4-A5: keine
A5: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

4/1 Stochastik (2 BE und 3 BE)

Bei einem Glücksspiel wird ein Pfeil auf die Abbildung 1 dargestellte Scheibe geworfen. Es wird angenommen, dass jeder Pfeil die Scheibe trifft. Die Skalierung gibt den Radius der einzelnen Kreise (in Längeneinheiten) an.

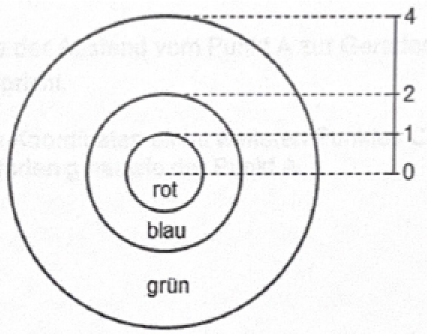


Abb. 1

Man trifft die unterschiedlich gefärbten Bereiche auf der Scheibe mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

rot	blau	grün
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$

a) Für das Glücksspiel gelten folgende Regeln:
- Ein Spieler bezahlt einen Einsatz von a Euro.
- Je nach getroffener Farbe erhält der Spieler folgende Auszahlung:

Getroffene Farbe	Auszahlung
rot	6 Euro
blau	2 Euro
grün	1 Euro

Berechnen Sie den maximalen Einsatz a, sodass der Spieler auf lange Sicht keinen Verlust macht.

b) Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r beträgt $\pi \cdot r^2$.
Zeigen Sie, dass die obigen Wahrscheinlichkeiten dem Flächenanteil des jeweiligen Bereiches an der gesamten Kreisfläche entsprechen.

4/2 Lineare Algebra (3 BE und 2 BE)

Gegeben sind die Punkte A(4|2|-3), B(3|0|-1) und die Gerade g, wobei

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Abstand vom Punkt A zur Geraden g der Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ entspricht.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes C, der den gleichen Abstand zur Geraden g hat wie der Punkt A.

5/1 Stochastik (2 BE und 3 BE)

Ein Kartenspiel hat einen Kartensatz mit 32 Karten: In jeder der vier Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo gibt es jeweils ein Ass, einen König, eine Dame, einen Buben, eine 10, eine 9, eine 8 und eine 7.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

Die gezogene Karte zeigt Karo oder ist eine Dame.

Ein anderes Spiel hat einen Kartensatz, der nur aus 4 Assen und n Jokern besteht. Es wird zweimal ohne Zurücklegen eine Karte gezogen.
Die Wahrscheinlichkeit, zwei Asse zu ziehen, beträgt $\frac{2}{5}$.

b) Zeigen Sie, dass die Berechnung der Anzahl der Joker auf folgende Gleichung führt:

$$2n^2 + 14n + 24 = 60$$

5/2 Lineare Algebra (5 BE)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 12 \\ 5x & +10y & +20z & = & 150 \end{array}$$

Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems, wenn x, y und z natürliche Zahlen sind.

6 Analysis (Problemlöseaufgabe) (10 BE)

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentieren und reflektieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Gegeben sind folgende drei Eigenschaften, die eine Funktion f bzw. deren Graph haben kann:

- f ist eine Polynomfunktion.
- Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Der Graph von f besitzt mindestens einen Hochpunkt.

Bestimmen Sie jeweils einen passenden Funktionsterm, so dass die Funktion f

a) …nur genau eine der drei Eigenschaften erfüllt.
b) …genau zwei der drei Eigenschaften erfüllt.
c) …alle drei Eigenschaften erfüllt.

Lösungen

4/1 Stochastik

a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Auszahlung in Euro an den Spieler.

Es gilt: $P(X=6)=\frac{1}{16}$ und $P(X=2)=\frac{3}{16}$ und $P(X=1)=\frac{3}{4}$

Berechnung der erwarteten Auszahlung:
$E(X)=6\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{3}{16}+1\cdot\frac{3}{4}=1{,}50$ Euro

Da der Spieler auf lange Sicht pro Spiel im Durchschnitt 1,50 Euro ausgezahlt bekommet, darf er einen maximalen Einsatz von a = 1,50 Euro leisten, wenn er auf lange Sicht keinen Verlust machen will.

b) Flächeninhalt des gesamten Kreises: $A_{ges}=\pi\cdot 4^2=16\pi$

Flächeninhalt des roten Kreises: $A_{rot}=\pi\cdot 1^2=\pi$

Flächeninhalt des blauen Kreisrings: $A_{blau}=\pi\cdot 2^2-A_{rot}=4\pi-\pi=3\pi$

Flächeninhalt des grünen Kreisrings: $A_{grün}=A_{ges}-A_{rot}-A_{blau}=16\pi-\pi-3\pi=12\pi$

Wahrscheinlichkeit für rot: $\frac{A_{rot}}{A_{ges}}=\frac{\pi}{16\pi}=\frac{1}{16}$

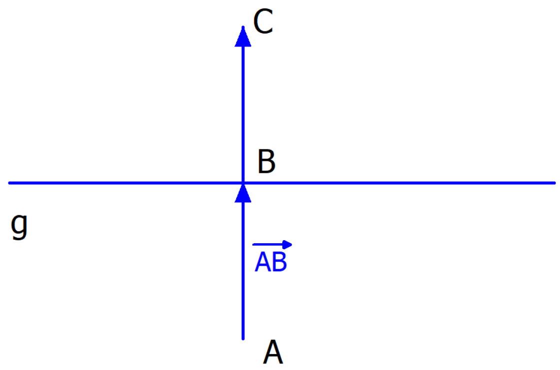
Wahrscheinlichkeit für blau: $\frac{A_{blau}}{A_{ges}}=\frac{3\pi}{16\pi}=\frac{3}{16}$

Wahrscheinlichkeit für grün: $\frac{A_{grün}}{A_{ges}}=\frac{12\pi}{16\pi}=\frac{3}{4}$

Daher entsprechen die angegebenen Wahrscheinlichkeiten den Flächenanteilen an der gesamten Kreisfläche.

4/2 Lineare Algebra

a) Die Gerade g geht durch den Punkt B(3|0|-1) (siehe Stützvektor von g).



Der Abstand von A zur Geraden g entspricht dann der Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$,

wenn der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zur Geraden g und damit orthogonal zum Richtungsvektor von g verläuft.

Rechnerische Kontrolle: $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 - 8 + 6 = 0$

Da das Skalarprodukt Null ergibt, ist die Bedingung erfüllt.

b) Der gesuchte Punkt C ergibt sich aus der Spiegelung des Punktes A am Punkt B (siehe Skizze).

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C hat die Koordinaten C(2|-2|1).

5/1 Stochastik

a) Gesucht ist die Anzahl der Karten, die Karo oder eine Dame zeigen.
Es gibt 8 unterschiedliche Karokarten (Ass, König, Dame,…,7) sowie zusätzlich noch 3 Damen in den Farben Kreuz, Pik und Herz.

P(Karo oder Dame) = $\frac{11}{32}$

b) In dem Kartensatz befinden sich insgesamt n + 4 Karten.

P(es werden 2 Asse ohne Zurücklegen gezogen) = $\frac{4}{n+4} \cdot \frac{3}{n+3} = \frac{2}{5}$

Lösung der Gleichung:

$$\frac{12}{(n+4)(n+3)} = \frac{2}{5} \qquad | \cdot 5 \cdot (n+4) \cdot (n+3)$$

$$60 = 2 \cdot (n+4)(n+3)$$
$$\Leftrightarrow 60 = 2(n^2 + 7n + 12)$$
$$\Leftrightarrow 60 = 2n^2 + 14n + 24$$

Dies war zu zeigen.

5/2 Lineare Algebra

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x & +y & +z & = & 12 \\ (2) & 5x & +10y & +20z & = & 150 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x & +y & +z & = & 12 \\ 5\cdot(1)-(2) & & -5y & -15z & = & -90 \end{array}$$

Die Variablen x,y,z sollen natürliche Zahlen sein, also aus der Menge $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$ stammen.

1.Fall: Wähle z = 0. Daraus folgt y = 18 und x = -6, also nicht möglich.
2.Fall: Wähle z = 1. Daraus folgt y = 15 und x = -4, also nicht möglich.
3.Fall: Wähle z = 2. Daraus folgt y = 12 und x = -2, also nicht möglich.
4.Fall: Wähle z = 3. Daraus folgt y = 9 und x = 0. Dies ist eine Lösung.
5.Fall: Wähle z = 4. Daraus folgt y = 6 und x = 2. Dies ist eine Lösung.
6.Fall: Wähle z = 5. Daraus folgt y = 3 und x = 4. Dies ist eine Lösung.
7.Fall: Wähle z = 6. Daraus folgt y = 0 und x = 6. Dies ist eine Lösung.

Weitere Lösungsmöglichkeiten gibt es nicht.

6 Analysis

Analyse:

- Was ist eine Polynomfunktion?
  f hat die Gestalt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
- Welche Funktionen sind keine Polynomfunktionen?
  z.B. trigonometrische Funktionen $f(x) = \sin(x)$ oder $f(x) = \cos(x)$
- Gibt es Polynomfunktionen, die nicht achsensymmetrisch sind?
  Ja, wenn nicht alle Exponenten bei x geradzahlig sind.
- Gibt es Polynomfunktionen, die keinen Hochpunkt besitzen?
  Ja, z.B. die nach oben geöffnete Normalparabel $f(x) = x^2$

Durchführung:

a) …nur genau eine der drei Eigenschaften erfüllt.

1) Nur die Eigenschaft „f ist eine Polynomfunktion“: $f(x) = x^3$
2) Nur die Eigenschaft „Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse“: $f(x) = \frac{1}{x^2}$
3) Nur die Eigenschaft „Graph besitzt mindestens einen Hochpunkt: $f(x) = \sin(x)$

b) …genau zwei der drei Eigenschaften erfüllt.

1) „f ist eine Polynomfunktion“ und „Graph ist achsensymmetrisch“: $f(x) = x^2$
2) „f ist eine Polynomfunktion“ und „Graph besitzt mindestens einen Hochpunkt“:
   $f(x) = -(x+1)^2$
3) „Graph ist achsensymmetrisch“ und „Graph besitzt mindestens einen Hochpunkt“:
   $f(x) = \cos(x)$

c) …alle drei Eigenschaften erfüllt.
   $f(x) = -x^2$