

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2025

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

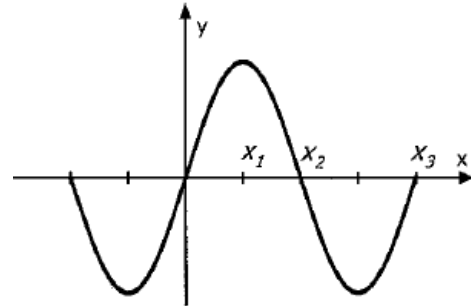
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Der Hochpunkt $H(-1|1)$ und der Tiefpunkt $T(1|-4)$ sind die benachbarten Extrempunkte einer trigonometrischen Funktion.

- 4.1 Geben Sie die Koordinaten je eines weiteren Hoch- und Tiefpunktes sowie eines Wendepunktes an. (4 Punkte)

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_h der Funktion $h(x) = 3 \cdot \sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$



- 4.2 Bestimmen Sie x_1, x_2 und x_3 .

Die Tangenten zweier benachbarter Wendepunkte von K_h schließen mit der x-Achse eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Flächeninhalt. (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3x^5 - 160x^3 + 4000x$, $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild ist K_f

- 4.3 Zeigen Sie durch eine geeignete Rechnung: K_f besitzt weder Hoch- noch Tiefpunkte.

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen K_f rechtsgekrümmt ist. (8 Punkte)

K_g ist das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \frac{4}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Für $0 < u < 6$ liegen die Punkte $A(-u|g(-u))$ und $B(u|g(u))$ auf K_g und die Punkte

$C(u|48)$ und $D(-u|48)$ auf der Geraden mit der Gleichung $y = 48$.

Die Punkte ABCD bilden ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck.

- 4.4 Zeichnen Sie K_g und die Gerade $-6 \leq x \leq 6$ sowie das Rechteck ABCD für $u = 3$. (5 Punkte)

- 4.5 Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks ABCD. (5 Punkte)

Lösung

- 4.1 Der waagrechte Abstand der benachbarten Extrempunkte ist 2.
Daraus ergibt sich als Periode $p = 4$.

Der nächste Hochpunkt liegt bei $H(-1+4|1)$, also $H(3|1)$.

Der nächste Tiefpunkt liegt bei $T(1+4|-4)$, also $T(5|-4)$.

Die Höhe der Mittellinie des Schaubildes liegt bei $d = \frac{1-4}{2} = -1,5$.

Auf der Mittellinie liegen die Wendepunkte des Schaubildes.

Ein x-Wert des Wendepunktes ergibt sich als Mittelwert der x-Werte des Hoch- und Tiefpunktes, also $x_w = \frac{-1+1}{2} = 0$.

Ein Wendepunkt lautet $W(0|-1,5)$.

- 4.2 Die Periode der Funktion lautet $p = \frac{2\pi}{3}$.

Somit ist $x_3 = p = \frac{2\pi}{3}$.

Daraus folgt $x_2 = \frac{p}{2} = \frac{\pi}{3}$ und $x_1 = \frac{p}{4} = \frac{\pi}{6}$.

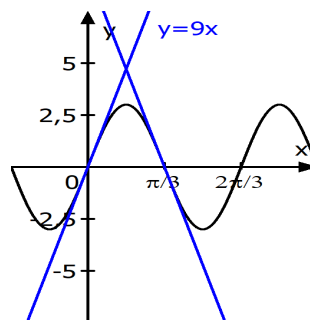
Ein Wendepunkt ist gemäß dem Schaubild $W(0|0)$.

Ansatz für Tangentengleichung in $W(0|0)$: $y = mx + c$

Da die Tangente durch $W(0|0)$ verläuft gilt $c = 0$.

Es gilt $h'(x) = 3\cos(3x) \cdot 3 = 9\cos(3x)$. Daraus folgt $m = h'(0) = 9$

Tangentengleichung: $y = 9x$



Grundseite des Dreiecks: $g = \frac{\pi}{3}$

Die Höhe des Dreiecks ergibt sich durch Einsetzen von $x = \frac{\pi}{6}$ in die

Tangentengleichung: $h = 9 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

Fläche des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

4.3 $f(x) = 3x^5 - 160x^3 + 4000x$

Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Es gilt $f'(x) = 15x^4 - 480x^2 + 4000$ und $f''(x) = 60x^3 - 960x$

$15x^4 - 480x^2 + 4000 = 0$ Substitution: $z = x^2$

$15z^2 - 480z + 4000 = 0$

Lösung mit der abc-Formel: $z_{1,2} = \frac{480 \pm \sqrt{480^2 - 4 \cdot 15 \cdot 4000}}{30} = \frac{480 \pm \sqrt{-9600}}{30}$

Da die Zahl unter der Wurzel negativ ist, besitzt die Gleichung keine Lösung.
Da die Gleichung $f'(x) = 0$ nicht lösbar ist, besitzt das Schaubild von f keine Extrempunkte.

Zur Bestimmung der Bereiche, in denen das Schaubild von f rechtsgekrümmt ist, werden zuerst die Wendestellen berechnet.

Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Es gilt $f'''(x) = 180x^2 - 960$

$60x^3 - 960x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (60x^2 - 960) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x_1 = 0$

Gleichung II): $60x^2 - 960 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$f'''(0) = -960 \neq 0$ also Wendestelle $x = 0$

$f'''(\pm 4) = 1920 \neq 0$ also Wendestellen bei $x = -4$ und $x = 4$.

Kontrolle der Krümmung des Schaubildes für $x < -4$:

Test mit $x = -5$: $f''(-5) = -2700 < 0$

Somit ist das Schaubild von f rechtsgekrümmt für $x < -4$.

Da bei $x = -4$ eine Wendestelle ist, ist das Schaubild für $-4 < x < 0$ linksgekrümmt.

Da bei $x = 0$ eine weitere Wendestelle ist, ist das Schaubild für $0 < x < 4$ rechtsgekrümmt.

Da bei $x = 4$ eine weitere Wendestelle ist, ist das Schaubild für $x > 4$ linksgekrümmt.

Fazit: K_f ist rechtsgekrümmt für $x < -4$ und $0 < x < 4$.

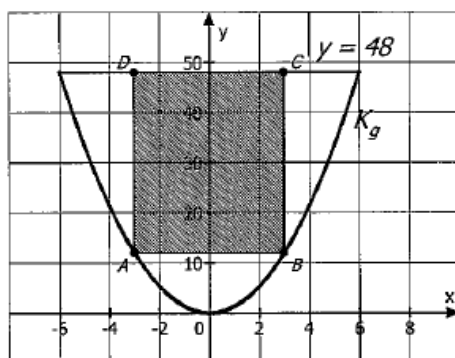
4.4 Zeichnung:

Für $u = 3$ haben die Punkte folgende Koordinaten:

$A(-3|g(-3))$, also $A(-3|12)$

$B(3|g(3))$, also $B(3|12)$

$C(3|48)$ und $D(-3|48)$

4.5 Flächeninhalt des Rechtecks: $A = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$

Es gilt $\overline{AB} = u - (-u) = 2u$ und $\overline{BC} = 48 - g(u) = 48 - \frac{4}{3}u^2$.

Die Zielfunktion lautet $A(u) = 2u \cdot \left(48 - \frac{4}{3}u^2\right) = 96u - \frac{8}{3}u^3$.

Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $A(u)$ für $0 < u < 6$.

Bedingung für lokales Maximum (Hochpunkt): $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

Es gilt $A'(u) = 96 - 8u^2$ und $A''(u) = -16u$.

$$96 - 8u^2 = 0 \Leftrightarrow u^2 = 12 \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{12}$$

Da $u > 0$ vorgegeben ist, kommt nur $u = \sqrt{12}$ in Betracht.

Es gilt $A''(\sqrt{12}) < 0$, somit liegt bei $u = \sqrt{12}$ ein lokales Maximum vor.

Es gilt $A(\sqrt{12}) \approx 221,7$

Nun muss noch kontrolliert werden, ob das lokale Maximum auch ein absolutes (globales) Maximum ist.

Hierzu müssen die Randwerte für $u = 0$ und $u = 6$ überprüft werden:

$$A(0) = 0 < 221,7$$

$$A(6) = 0 < 221,7$$

Da bei $u = 0$ und $u = 6$ kein größerer Flächeninhalt entsteht, beträgt der gesuchte maximale Flächeninhalt $A(\sqrt{12}) \approx 221,7$ Flächeneinheiten.