# Hauptprüfung Fachhochschulreife 2025

# Baden-Württemberg

## Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

## Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

## Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5e^{2x} + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist $K_f$.

3.1 Zeichnen Sie $K_f$ für $-4 \le x \le 1$ in ein Koordinatensystem. (3 Punkte)

3.2 $K_f$ schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt. (5 Punkte)

3.3 Zeigen Sie, dass sich $K_f$ und die Gerade g mit $g(x) = -x + 1{,}5$ im Schnittpunkt mit der y-Achse berühren. (4 Punkte)

3.4 Beurteilen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(1) Jedes Schaubild einer Stammfunktion F von f besitzt einen Hochpunkt.
(2) Die Ableitung $f'$ von f ist monoton fallend für alle $x \in \mathbb{R}$.
(3) Das Schaubild von $f''$ liegt oberhalb der x-Achse für alle $x \in \mathbb{R}$.
(6 Punkte)

3.5 $K_f$ schneidet die Gerade mit der Gleichung y = x.
Ermitteln Sie die Schnittstelle auf 2 Nachkommastellen genau. (4 Punkte)

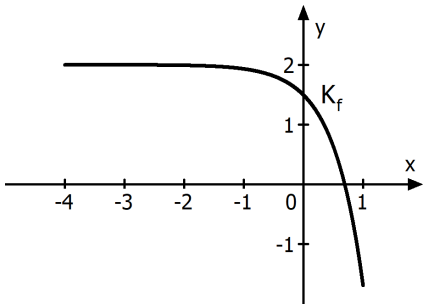
Gegeben ist die trigonometrische Funktion h mit $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{3}x) - 1$, $x \in [-4;8]$.
Ihr Schaubild ist $K_h$.

3.6 Geben Sie die Periode und den Wertebereich der Funktion h an. (3 Punkte)

3.7 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion h. (5 Punkte)

## Lösung

3.1 Zeichnung des Schaubildes unter Nutzung der Wertetabelle des Taschenrechners.
Für die Zeichnung hilfreich: Die Gerade y = 2 ist die waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$.




3.2 Zur Berechnung der Fläche benötigt man die Schnittstelle von f mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}5e^{2x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow x = 0{,}5 \cdot \ln(4) \approx 0{,}69$$

Flächeninhalt:

$$A = \int_0^{0{,}5\ln(4)} (-0{,}5e^{2x} + 2)dx = \left[-\frac{1}{4}e^{2x} + 2x\right]_0^{0{,}5\ln(4)} = -1 + \ln(4) - (-\frac{1}{4}) \approx 0{,}64$$

3.3 Das Schaubild $K_f$ berührt die Gerade g auf der y-Achse, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: $f(0) = g(0)$ (gemeinsamer Punkt) und $f'(0) = g'(0)$ (gemeinsame Steigung).

Es gilt $f(0) = g(0)$ = 1,5. Diese Bedingung ist erfüllt.

Es gilt $f'(x) = -0{,}5e^{2x} \cdot 2 = -e^{2x}$ und $g'(x) = -1$.
Daraus folgt $f'(0) = g'(0) = -1$, so dass auch diese Bedingung erfüllt ist.

3.4 (1) Die Aussage ist wahr, da $K_f$ bei $x \approx 0{,}69$ eine Nullstelle besitzt mit einem Vorzeichenwechsel von + nach -.

(2) Die Aussage ist wahr. Die Funktion $f'(x) = -e^{2x}$ ist monoton fallend, wenn die Ableitung von $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ negativ ist.
Wegen $f''(x) = -2e^{2x}$ < 0 ist für alle $x \in \mathbb{R}$, ist die Bedingung erfüllt.

(3) Die Aussage ist falsch. Die Funktion $f''(x) = -2e^{2x}$ nimmt nur negative Werte an, daher verläuft das Schaubild von $f''$ unterhalb der x-Achse.

Andere Begründung: Das Schaubild von f ist rechtsgekrümmt, somit ist $f''(x) < 0$ und das Schaubild von $f''$ verläuft unterhalb der x-Achse.

3.5 Schnittstelle: Gleichsetzen der Funktionsgleichungen

$-0{,}5e^{2x}+2=x \Leftrightarrow -0{,}5e^{2x}+2-x=0$

Die Gleichung kann nur mit einem Taschenrechner mit einer Wertetabelle näherungsweise gelöst werden.

Eingabe der Funktion $h(x)=-0{,}5e^{2x}+2-x$ in den Taschenrechner.
Wertetabelle: $h(0{,}5)=0{,}1408$ und $h(0{,}6)=-0{,}26$
Somit muss die Schnittstelle im Intervall [0,5; 0,6] liegen.

Wertetabelle: $h(0{,}53)=0{,}0268$ und $h(0{,}54)=-0{,}012$
Somit muss die Schnittstelle im Intervall [0,53 ; 0,54] liegen.

Wertetabelle: $h(0{,}536)=0{,}003$ und $h(0{,}537)=-0{,}0005$

Auf zwei Dezimalstellen gerundet lautet die Schnittstelle $x \approx 0{,}54$.

3.6 Die Höhe der waagrechten Mittellinie ist d = -1.
Die Amplitude lautet a = 2.

Daraus folgt für den Wertebereich W = [-1-2 ; -1+2] = [-3; 1]

Periode $p=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

3.7 Nullstellen von h: $h(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(\frac{\pi}{3}x)-1=0 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{3}x)=\frac{1}{2}$

Substitution: $u=\frac{\pi}{3}x$

$\cos(u)=\frac{1}{2}$

Taschenrechner: $u_1=\cos^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$

Daraus folgt: $u_2=2\pi-u_1=\frac{5}{3}\pi$

Rücksubstitution von $u_1$: $\frac{\pi}{3}x=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x_1=1$

Rücksubstitution von $u_2$: $\frac{\pi}{3}x=\frac{5}{3}\pi \Leftrightarrow x_2=5$

Weitere Lösungen sind eine Periode von den vorhandenen Lösungen entfernt:

$x_3=x_1+p=1+6=7$
$x_4=x_2-p=5-6=-1$

Alle weiteren Lösungen der Gleichung liegen außerhalb vom Intervall [-4;8] und sind somit keine Nullstellen der Funktion.