

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2025

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

- 2.1 Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm einer Polynomfunktion p vom Grad 3, deren Schaubild die x -Achse bei $x = 0$ berührt, an der Stelle $x = 6$ die x -Achse schneidet und durch den Punkt $P(3|9)$ verläuft. (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild heißt K_f .

- 2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Hoch- und Tiefpunktes von K_f .
Zeichnen Sie K_f für $-2,5 \leq x \leq 6,5$. (7 Punkte)
- 2.3 K_f schließt mit der x -Achse eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (5 Punkte)

Bei einem Reaktorunglück werden radioaktive Stoffe freigesetzt. Die Strahlenbelastung in Mikrosievert pro Tag ($\mu\text{Sv} / \text{d}$) wird beschrieben durch die Funktion s mit $s(t) = a \cdot e^{kt}$, $t \geq 0$. Dabei ist t die Zeit nach dem Unglück in Tagen.

- 2.4 Die nachfolgende Tabelle zeigt die Ergebnisse einer Messung:

Zeit in Tagen	0	8
Strahlenbelastung in $\mu\text{Sv} / \text{d}$	600	120

Bestimmen Sie a und k . (3 Punkte)

Im Folgenden gilt $s(t) = 550 \cdot e^{-0,15t}$, $t \geq 0$.

- 2.5 Bestimmen Sie die Strahlenbelastung am 10.Tag und am 20.Tag.
Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Strahlenbelastung in diesem Zeitraum. (4 Punkte)
- 2.6 Als unbedenklich für die Bevölkerung gilt ein Grenzwert von $3 \mu\text{Sv} / \text{d}$.
Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen dieser Grenzwert unterschritten wird. (3 Punkte)
- 2.7 Berechnen Sie die gesamte Strahlenbelastung in μSv , der die Bevölkerung innerhalb der ersten 30 Tage ausgesetzt wird. (4 Punkte)

Lösung

- 2.1 Die Berührung der x-Achse bei $x = 0$ bedeutet, dass die Funktion bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle besitzt.
Bei $x = 6$ liegt eine einfache Nullstelle vor.

Aufstellen des Funktionsterms in Produktform: $p(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - 6)$

Einsetzen des Punktes $P(3|9)$: $9 = a \cdot 3^2 \cdot (-3) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

Funktionsterm: $p(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot (x - 6)$

- 2.2 Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Es gilt $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$ und $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$.

$f'(x) = 0 : \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{3}{8}x - \frac{3}{2}\right) = 0$ Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $\frac{3}{8}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 4$

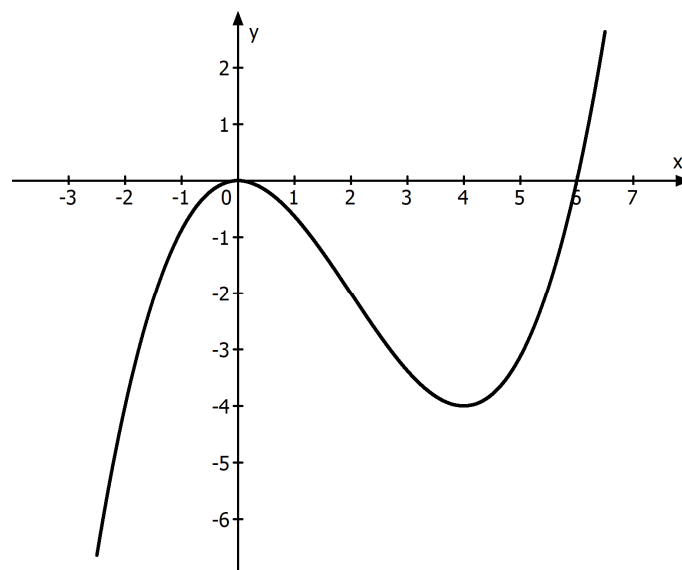
$f''(0) = -\frac{3}{2} < 0$: Bei $x = 0$ existiert eine Maximumstelle.

Wegen $f(0) = 0$ existiert der Hochpunkt $H(0|0)$.

$f''(4) = 1,5 > 0$: Bei $x = 4$ existiert eine Minimumstelle.

Wegen $f(4) = -4$ existiert der Tiefpunkt $T(4|-4)$.

Zeichnung (mit Nutzung einer Wertetabelle)



2.3 Die Integralgrenzen sind die Nullstellen von f : $x = 0$ und $x = 6$:

$$\int_0^6 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 \right]_0^6 = \frac{1}{32} \cdot 6^4 - \frac{1}{4} \cdot 6^3 - 0 = -13,5$$

Der Flächeninhalt beträgt $A = 13,5$.

2.4 $s(t) = a \cdot e^{kt}$

Es gilt $s(0) = 600 \Rightarrow a \cdot e^0 = 600 \Rightarrow a = 600$

Es gilt $s(8) = 120 \Rightarrow 600 \cdot e^{k \cdot 8} = 120 \Leftrightarrow e^{8k} = 0,2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{8} \ln(0,2) \approx -0,201$

2.5 Es gilt $s(t) = 550 \cdot e^{-0,15t}$

Strahlenbelastung am 10.Tag: $s(10) = 122,7 \text{ } \mu\text{Sv / d}$

Strahlenbelastung am 20.Tag: $s(20) = 27,38 \text{ } \mu\text{Sv / d}$

Mittlere Änderungsrate im Zeitraum $[10;20]$:

$$\frac{s(20) - s(10)}{20 - 10} = \frac{27,38 - 122,7}{10} = -9,53$$

Die mittlere Änderungsrate beträgt $-9,53 \text{ } \mu\text{Sv / d}$ pro Tag.

2.6 Zunächst wird berechnet, wann der Grenzwert genau erreicht wird.

Bedingung: $s(t) = 3$

$$3 = 550 \cdot e^{-0,15t} \Leftrightarrow e^{-0,15t} = \frac{3}{550} \Leftrightarrow t = \frac{1}{-0,15} \ln\left(\frac{3}{550}\right) = 34,7$$

Da die Funktion $s(t)$ streng monoton fällt, wird für $t > 34,7$ der Grenzwert unterschritten.

Nach etwa 35 Tagen wird der Grenzwert unterschritten.

2.7 Gesamte Strahlenbelastung in den ersten 30 Tagen:

$$\int_0^{30} 550e^{-0,15t} dt = \left[\frac{550}{-0,15} e^{-0,15t} \right]_0^{30} = -40,73 - (-3666,67) = 3625,94$$

Die gesamte Strahlenbelastung beträgt $3625,94 \text{ } \mu\text{Sv}$.