

Integralrechnung vermischte Aufgaben

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufliche Gymnasien: ab Klasse12 (Aufgaben ohne *)
Berufskolleg: (Aufgaben ohne *)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgaben ohne Hilfsmittel:**Aufgabe 1:**

Gib eine Stammfunktion an:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = 6x^4 - 4x^3 + 13$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 5e^x - \sin(x)$

e) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - 6 \cdot \sqrt[3]{x}$

f) $f(x) = (x+6)^7$

g) $f(x) = \frac{1}{3}(4-x)^4$

h) $f(x) = 4e^{2x} + 3e^{-x}$

i) $f(x) = 5e^{3x-1} + \cos(4x-1)$

j) $f(x) = -\sin\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4}\right)$

k) $f(x) = (e^x - 1)^2$

Aufgabe 2:Die Integralfunktion I ist für alle reellen Zahlen definiert durch $I(x) = \int_1^x (2t+1)dt$.

Entscheide, welche der Aussagen wahr sind und begründe deine Entscheidung.

a) $I(x) = 2 \cdot \int_1^x t dt + x - 1$

b) $I(1) = 0$

c) $I'(x) = 2x + 1$

d) Die Funktion $I(x)$ ist monoton wachsend.**Aufgabe 3:**Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse über dem Intervall $[a;b]$. Skizziere zunächst das Schaubild von f .

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $[-1 ; 2]$

b) $f(x) = -x^2$; $[0 ; 2]$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$; $[-3 ; 3]$

Aufgabe 4:Für welchen Wert von a gilt:

a) $\int_2^a \frac{1}{2}x^2 dx = 34 \frac{2}{3}$

b) $\int_0^a (x-a)(x+a) dx = 3$

Aufgabe 5*:Bestimme einen Funktionsterm der Integralfunktion J_{-1} mit $J_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$.

a) $f(t) = \frac{2}{3}e^{-0,5t+5}$

b) $f(t) = \frac{3}{2t-1}$

c) $f(t) = \frac{2+t^2+t^5}{3t^3}$

Aufgabe 6*:

a) Berechne das Integral und fasse das Ergebnis soweit wie möglich zusammen.

$$(1) \int_{-1}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx$$

$$(2) \int_0^{2\pi} 2 \sin(0,5x) dx$$

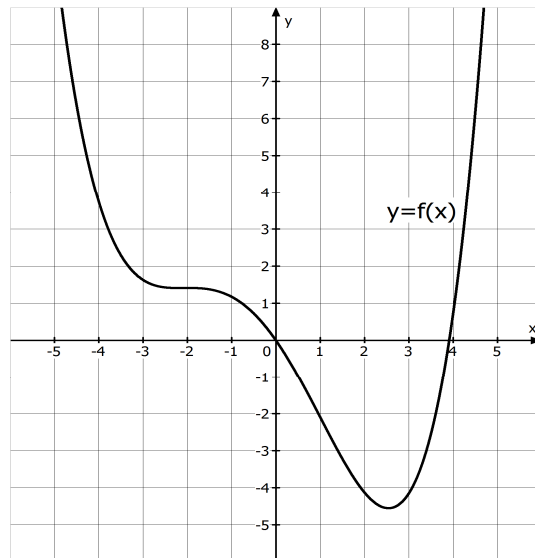
b) Berechne z.

$$(1) \int_1^z \left(4 - \frac{2}{x^2}\right) dx = 3$$

$$(2) \int_z^e \left(\frac{2}{x+e}\right) dx = 2 \cdot \ln(2)$$

Aufgabe 7:

- a) F sei die Stammfunktion von f. Entscheide, ob die Aussage wahr, falsch oder unentscheidbar ist. Gib jeweils eine kurze Begründung an.
- (1) F hat bei $x = 0$ ein Maximum.
 - (2) F hat im Intervall $[-2; 2]$ nur positive Funktionswerte
 - (3) F hat bei $x \approx -2$ eine Wendestelle.
 - (4) F hat bei $x \approx 2,5$ ein Minimum.
 - (5) F hat bei $x \approx 2,5$ eine Wendestelle.
 - (6) F ist im Intervall $[-4; 0]$ monoton steigend
 - (7) $F(-2) - 8 < F(-4)$



b) Skizziere in die nebenstehende Abbildung den Graphen von F mit $F(-4) = 0$.

Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x - 0,5x^2$, $0 \leq x \leq 6$

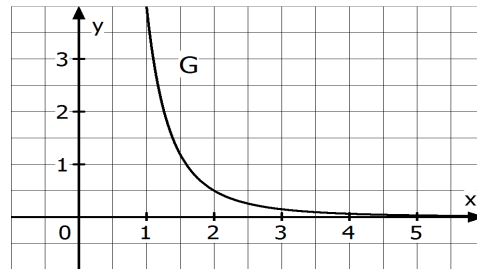
- a) Skizziere das Schaubild K von f. Die x-Achse, K und die Gerade $x = 6$ begrenzen im Bereich $4 \leq x \leq 6$ eine Fläche. Berechne den Inhalt dieser Fläche.
- b) Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt B(4/0). Der Graph von f, seine Tangente in B(4/0) und die y-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt.

Aufgabe 9*:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^3}$,

$x > 0$.

Der Graph G von f , die x -Achse und die Gerade $x = 1$ begrenzen eine ins Unendlich reichende Fläche. Untersuche, ob ihr Inhalt einen Grenzwert hat.

**Aufgabe 10*:**

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer ganzrationalen Funktion f . Begründe, welche der folgenden Aussagen

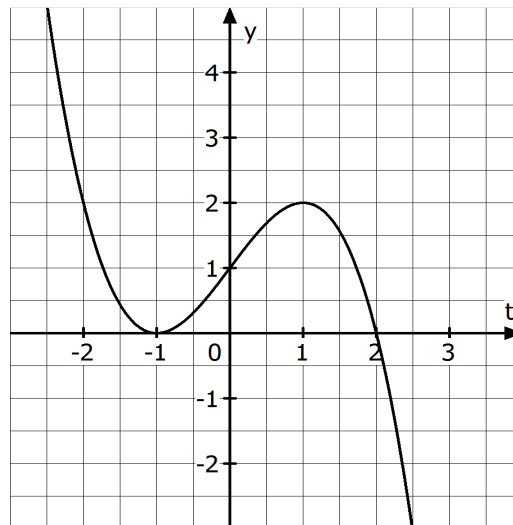
über die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ wahr und welche falsch sind.

(1) $F(2) < 2$

(2) Der Graph von F ist für $-1 < x < 1$ eine Linkskurve.

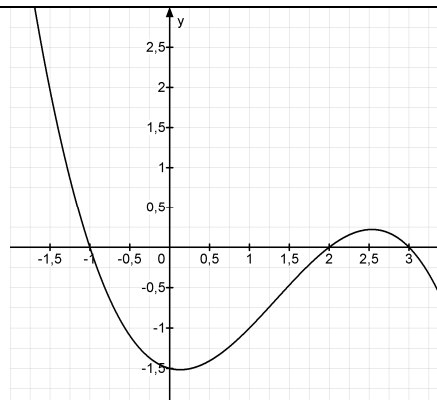
(3) $F(-2)$ ist positiv.

(4) $F''(1)$ ist Null

**Aufgabe 11:**

In untenstehendem Koordinatensystem ist das Schaubild einer Funktion f eingezeichnet. Die Funktion F sei eine Stammfunktion von f .

Welche der Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründe.



a) Das Schaubild von F besitzt bei $x = -1$ ein relatives Minimum.

b) Das Schaubild von F besitzt bei $x = 0$ eine Wendestelle.

c) Es gilt: $\int_2^3 f'(x) dx = 0$

d) Es gilt $\int_0^3 f(x) dx > 0$

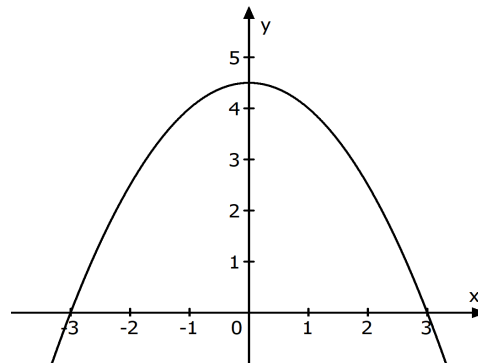
e) Das Schaubild von F ist für $x < 0$ streng monoton fallend.

Aufgaben mit Hilfsmittel (WTR und Merkhilfe)**Aufgabe 12:**

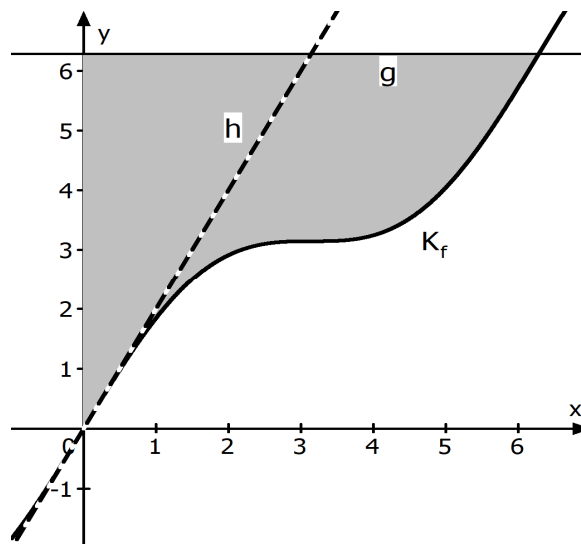
- a) Bestimme den Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von $f(x) = x^2 - 0,5x - 3$ und der x-Achse.
- b) Bestimme den Flächeninhalt zwischen den Schaubildern der Funktionen $f(x) = x^3 + x^2 + 0,25x$ und $g(x) = 1,5x^2 + 3,25x$

Aufgabe 13:

Ein Wasser führender Stollen hat einen parabelförmigen Querschnitt von 6 m Sohlenbreite und 4,5 m Scheitelhöhe. Wie viel m^3 Wasser kann der Stollen in 1 Sekunde führen bei einer Füllung von 2,5 Meter und einer Höchstgeschwindigkeit des Wassers von 4 m/s?

**Aufgabe 14:**

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f der Funktion $f(x) = x + \sin(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ sowie die Gerade g mit der Gleichung $y = 2\pi$ und die Tangente h an das Schaubild von f im Ursprung.



- a) Berechne $\int_0^1 f(x)dx$ und $\int_0^\pi f(x)dx$.
- b) Zeige rechnerisch, dass sich die Gerade g und das Schaubild von $f(x)$ an der Stelle $x = 2\pi$ schneiden. Berechne den exakten Inhalt des markierten Flächenstücks.
- c) In welchem Verhältnis teilt die waagrechte Tangente an das Schaubild von f das Flächenstück aus Teilaufgabe b)?
- d) In welchem Verhältnis teilt die Tangente im Ursprung das Flächenstück aus Teilaufgabe b)?

Aufgabe 15:

Die Temperatur eines Tages verlaufe nach der Gleichung $y = 15 - \frac{1}{20}(x - 14)^2$.

Dabei bedeute y die Temperatur in °C und x die Zeit in Stunden, beginnend um 0 Uhr bei $x = 0$.

- a) Berechne die mittlere Temperatur zwischen 0 Uhr und 12 Uhr.
- b) Berechne die mittlere Temperatur zwischen 12 Uhr und 24 Uhr.

Aufgabe 16:

Bei einem 100 Meter – Lauf treten Läufer A und B gegeneinander an.

Läufer A sprintet mit der Geschwindigkeitsfunktion $v_A(t) = 0,25t + 10 \cdot (1 - e^{-t})$.

Läufer B sprintet mit der Geschwindigkeitsfunktion $v_B(t) = 12 \cdot (1 - e^{-t}) + m \cdot t^2$.

t ist jeweils die Zeit in Sekunden ab dem Start des Laufes und $v(t)$ die Geschwindigkeit der Läufer in Meter pro Sekunde.

- a) Zeige, dass Läufer A ungefähr 9,8 Sekunden benötigt.
- b) Bestimme den Wert von m so, dass der Läufer nach 9,69 Sekunden ins Ziel kommt.

Lösungen
Aufgabe 1:

a) $F(x) = x^3 - x^2 + x$

b) $f(x) = x^{-2} \Rightarrow F(x) = -1 \cdot x^{-1} = -\frac{1}{x}$

c) $F(x) = \frac{6}{5}x^5 - x^4 + 13x$

d) $F(x) = \frac{1}{8}x^4 + 5e^x + \cos(x)$

e) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - 6 \cdot \sqrt[3]{x} = 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow F(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}x^{\frac{4}{3}}$

f) $F(x) = \frac{1}{8}(x+6)^8$

g) $F(x) = \frac{1}{15}(4-x)^5 \cdot \frac{1}{-1} = -\frac{1}{15}(4-x)^5$

h) $F(x) = 2e^{2x} - 3e^{-x}$

i) $F(x) = \frac{5}{3}e^{3x-1} + \frac{1}{4}\sin(4x-1)$

j) $F(x) = \cos\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4}\right) \cdot (-4) = -4 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x\right)$

k) $f(x) = (e^x - 1)^2 = e^{2x} - 2e^x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x$

Aufgabe 2:

Es gilt $I(x) = \int_1^x (2t+1)dt = \left[t^2 + t\right]_1^x = x^2 + x - (1+1) = x^2 + x - 2$

a) $I(x) = 2 \cdot \int_1^x t dt + x - 1 = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + x - 1 = x^2 - 1 + x - 1 = x^2 + x - 2$

also ist Aussage a) richtig.

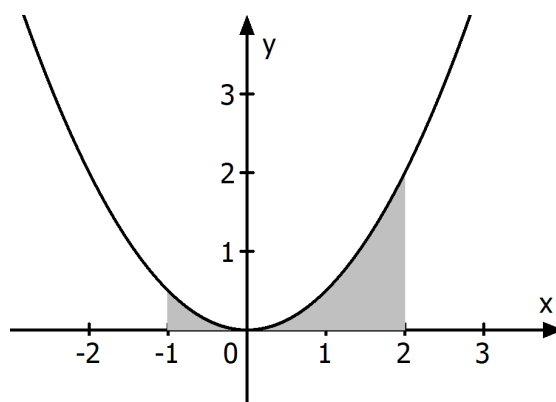
b) Die Aussage $I(1) = 0$ ist richtig, wie man leicht zu Einsetzen nachprüfen kann.

c) Es gilt $I'(x) = 2x + 1$, also ist c) richtig.

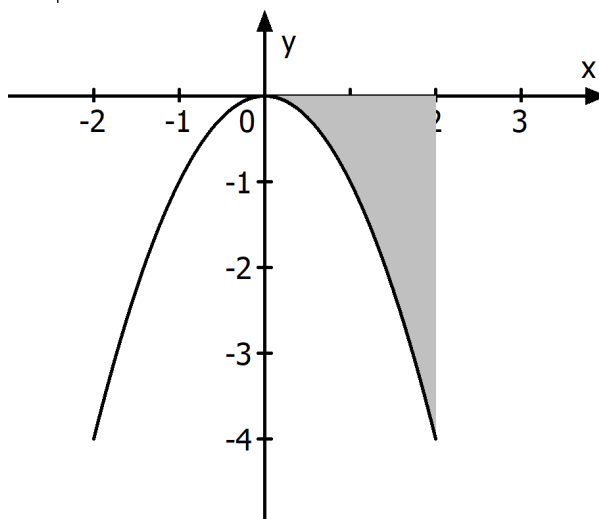
d) Bei dem Schaubild der Funktion I handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel. Diese Parabel ist links vom Scheitelpunkt streng monoton fallend und rechts vom Scheitelpunkt streng monoton steigend. Also ist die Aussage d) falsch.

Aufgabe 3:

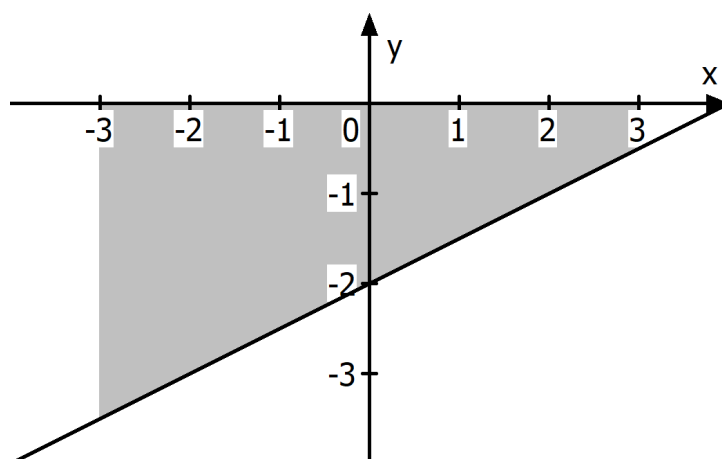
$$\text{a) } A = \int_{-1}^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$



$$\text{b) } A = \left| \int_0^2 -x^2 dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \right| = \left| -\frac{8}{3} - 0 \right| = \frac{8}{3}$$



$$\text{c) } A = \left| \int_{-3}^3 \left(\frac{1}{2} x - 2 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4} x^2 - 2x \right]_{-3}^3 \right| = \left| \frac{9}{4} - 6 - \left(\frac{9}{4} + 6 \right) \right| = 12$$



Hinweis: Man hätte die Trapezfläche auch ohne Integralrechnung berechnen können.

Aufgabe 4:

$$a) \int_2^a \frac{1}{2} x^2 dx = 34 \frac{2}{3} \Rightarrow \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_2^a = \frac{1}{6} a^3 - \frac{4}{3} = 34 \frac{2}{3} \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$b) \int_0^a (x-a)(x+a) dx = 3 \Rightarrow \int_0^a (x^2 - a^2) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - a^2 x \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3 - a^3 = -\frac{2}{3} a^3 = 3$$

$$\Rightarrow a = -\sqrt[3]{4,5}$$

Aufgabe 5:

$$a) J_{-1}(x) = \int_{-1}^x \frac{2}{3} e^{-0,5t+5} dt = \left[\frac{2}{3} e^{-0,5t+5} \cdot \frac{1}{-0,5} \right]_{-1}^x = \left[-\frac{4}{3} e^{-0,5t+5} \right]_{-1}^x = -\frac{4}{3} e^{-0,5x+5} + \frac{4}{3} e^{5,5}$$

$$b) J_{-1}(x) = \int_{-1}^x \frac{3}{2t-1} dt = \left[3 \cdot \ln|2t-1| \cdot \frac{1}{2} \right]_{-1}^x = \left[\frac{3}{2} \ln|2t-1| \right]_{-1}^x = \frac{3}{2} \ln|2x-1| - \frac{3}{2} \ln(3)$$

c)

$$J_{-1}(x) = \int_{-1}^x \frac{2+t^2+t^5}{3t^3} dt = \int_{-1}^x \left(\frac{2}{3} t^{-3} + \frac{1}{3} t^{-1} + \frac{1}{3} t^2 \right) dt = \left[-\frac{1}{3} t^{-2} + \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{1}{9} t^3 \right]_{-1}^x =$$

$$-\frac{1}{3} x^{-2} + \frac{1}{3} \ln|x| + \frac{1}{9} x^3 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln(1) - \frac{1}{9} \right) = -\frac{1}{3} x^{-2} + \frac{1}{3} \ln|x| + \frac{1}{9} x^3 + \frac{2}{9}$$

Aufgabe 6:

a)

$$(1) \int_{-1}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx = \int_{-1}^0 (2x-1)^{-2} dx = \left[-(2x-1)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \right]_{-1}^0 = \left[-\frac{1}{2(2x-1)} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} 2 \sin(0,5x) dx = \left[-2 \cos(0,5x) \cdot \frac{1}{0,5} \right]_0^{2\pi} = \left[-4 \cos(0,5x) \right]_0^{2\pi} = -4 \cos(\pi) + 4(\cos(0)) = 4 + 4 = 8$$

b)

$$(1) \int_1^z \left(4 - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int_1^z (4 - 2x^{-2}) dx = \left[4x + 2x^{-1} \right]_1^z = 4z + \frac{2}{z} - (4 + 2) = 4z + \frac{2}{z} - 6$$

$$\text{Es soll gelten: } 4z + \frac{2}{z} - 6 = 3 \Leftrightarrow 4z^2 + 2 - 9z = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8} \Rightarrow z = 2 \text{ oder } z = 0,25$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_z^e \left(\frac{2}{x+e} \right) dx &= \left[2 \cdot \ln|x+e| \right]_z^e = 2 \cdot \ln(2e) - 2 \cdot \ln|z+e| = 2\ln(2) + 2\ln(e) - 2\ln|z+e| \\
 &= 2\ln(2) + 2 - 2\ln|z+e|
 \end{aligned}$$

Es soll gelten: $2\ln(2) + 2 - 2\ln|z+e| = 2\ln(2) \Leftrightarrow 2\ln|z+e| = 2 \Leftrightarrow \ln|z+e| = 1$

Da $\ln(e) = 1$ ist, muss $z = 0$ sein.

Aufgabe 7:

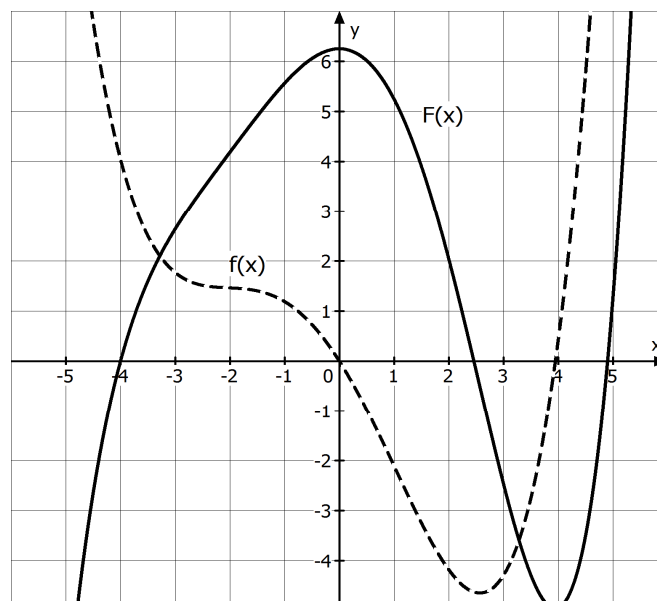
a)

- (1) Die Aussage ist wahr, da die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit VZW von + nach - besitzt.
- (2) Die Aussage ist nicht entscheidbar, da zu $f(x)$ keine eindeutige Stammfunktion existiert.
- (3) Die Aussage ist falsch, da $f(x)$ bei $x = -2$ ein relatives Minimum oder Maximum haben müsste, damit $F(x)$ dort eine Wendestelle hat.
- (4) Die Aussage ist falsch. Wenn F bei $x = 2,5$ ein Minimum hätte, müsste das Schaubild von f dort eine Nullstelle besitzen
- (5) Die Aussage ist wahr, da das Schaubild von f bei $x = 2,5$ ein relatives Minimum besitzt.
- (6) Diese Aussage ist wahr, da das Schaubild von f im Intervall $[-4 ; 0]$ positiv ist (also oberhalb der x -Achse verläuft)
- (7) Die Aussage lautet umgeformt $F(-2) - F(-4) < 8$.

$$\text{Es ist } F(-2) - F(-4) = \int_{-4}^{-2} f(x) dx.$$

Da die Fläche zwischen $f(x)$ und der x -Achse im Intervall $[-4 ; -2]$ kleiner als 8 ist, ist die Aussage wahr.

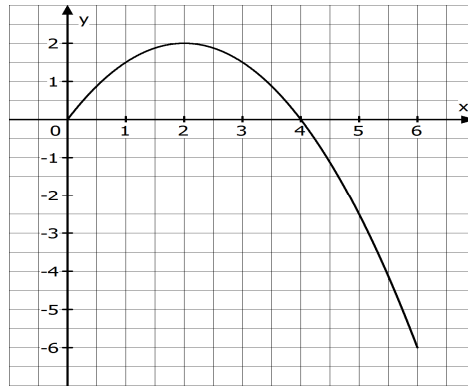
b)



Aufgabe 8:

- a) Die Skizze der nach unten geöffneten Parabel wird mit Hilfe einer Wertetabelle durchgeführt.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1,5	2	1,5	0	-2,5	-6



$$\text{Es ist } \int_4^6 f(x) dx = \left[x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right]_4^6 = 36 - 36 - \left(16 - \frac{32}{3} \right) = -\frac{16}{3}$$

Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist das Ergebnis des Integrals negativ.

Die gesuchte Fläche beträgt $A = \frac{16}{3}$ Flächeneinheiten.

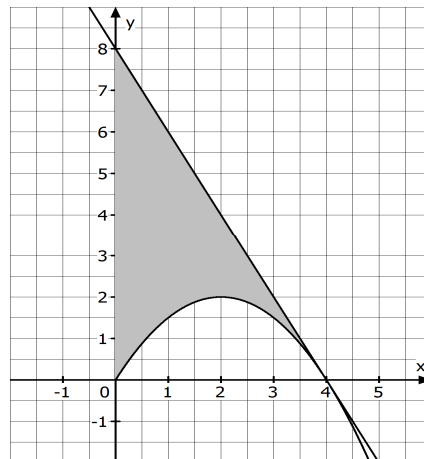
Ansatz für Tangentengleichung im Punkt B(4/0): $y = mx + c$

Tangentensteigung: Mit $f'(x) = 2 - x$ folgt $f'(4) = -2 = m$.

Einsetzen der Tangentensteigung und des Punktes B(4/0) in die Tangentengleichung:

$$0 = -2 \cdot 4 + b \Rightarrow b = 8$$

Tangentengleichung in B: $y = -2x + 8$



Der gesuchte grau markierte Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^4 (-2x + 8 - (2x - 0,5x^2)) dx = \int_0^4 (-4x + 8 + 0,5x^2) dx = \left[-2x^2 + 8x + \frac{1}{6} x^3 \right]_0^4$$

$$= -32 + 32 + \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3} \text{ Flächeneinheiten}$$

Aufgabe 9:

Da die Fläche nach rechts offen ist, wird als obere Grenze die Variable $x = z$ gewählt.

$$\int_1^z \frac{4}{x^3} dx = \int_1^z 4x^{-3} dx = \left[-2x^{-2} \right]_1^z = \left[\frac{-2}{x^2} \right]_1^z = \frac{-2}{z^2} + 2$$

Für $z \rightarrow +\infty$ strebt $\frac{-2}{z^2} + 2 \rightarrow 2$

Die nach rechts offene Fläche hat den Grenzwert $A = 2$.

Aufgabe 10:

(1) Es ist $F(2) = \int_0^2 f(t) dt$

Die Fläche zwischen $f(t)$ und der x-Achse im Intervall von 0 bis 2 ist größer als 2.
Die Aussage ist falsch.

(2) Der Graph von F ist eine Linkskurve, wenn $F''(x) > 0$ ist.

Da $F''(x) = f'(x)$ ist, muss somit $f'(x) > 0$ sein.

Im Intervall $-1 < x < 1$ ist das Schaubild von $f(x)$ streng monoton wachsend, somit sind Steigungen der Tangenten an $f(x)$ positiv und die Aussage ist wahr.

(3) $F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt$ liefert einen negativen Wert, da die Fläche zwar oberhalb der t-Achse liegt, aber von rechts nach links integriert wird und daher das Integral negativ wird.
Die Aussage ist falsch.

(4) $F''(1) = f'(1) = 0$ ist wahr, da bei $x = 1$ das Schaubild von $f(x)$ einen Hochpunkt besitzt und damit auch eine waagrechte Tangente.

Aufgabe 11:

a) Die Aussage ist falsch. Die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$.
Daher befindet sich bei $x = -1$ ein relatives Maximum.

b) Die Aussage ist wahr. An der Stelle $x = 0$ besitzt die Funktion $f(x)$ eine Extremstelle, somit besitzt die Funktion $F(x)$ dort eine Wendestelle.

c) $\int_2^3 f'(x) dx = [f(x)]_2^3 = f(3) - f(2) = 0 - 0 = 0$
Die Aussage ist wahr.

d) $\int_0^3 f(x) dx > 0$ ist eine falsche Aussage.

Die Fläche zwischen dem Schaubild von $f(x)$ und der x-Achse ist im Intervall $[0;3]$ unterhalb der x-Achse größer als oberhalb der x-Achse. Somit liefert das Integral ein negatives Ergebnis.

- e) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild von $f(x)$ befindet sich für $x < -1$ oberhalb der x-Achse.
Somit ist das Schaubild von $F(x)$ für $x < -1$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 12:

- a) Berechnung der Nullstellen von $f(x)$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 0,5x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{0,5 \pm \sqrt{0,25 + 12}}{2} = \frac{0,5 \pm 3,5}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -1,5$$

$$\int_{-1,5}^2 f(x) dx = \int_{-1,5}^2 (x^2 - 0,5x - 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 0,25x^2 - 3x \right]_{-1,5}^2 = \frac{8}{3} - 1 - 6 - (-1,125 - 0,5625 + 4,5)$$

$$\approx -7,15$$

Die Fläche beträgt $A = 7,15$ Flächeneinheiten.

- b) Für die Flächenberechnung zwischen den Schaubildern müssen die Schnittpunkte der Schaubilder ermittelt werden:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^3 + x^2 + 0,25x = 1,5x^2 + 3,25x \Rightarrow x^3 - 0,5x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 0,5x - 3) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } x^2 - 0,5x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{0,5 \pm \sqrt{0,25 + 12}}{2} = \frac{0,5 \pm 3,5}{2} \Rightarrow x_1 = 2 ; x_2 = -1,5$$

Die Fläche wird mit zwei Integralen berechnet:

$$A_1 = \left| \int_{-1,5}^0 (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_{-1,5}^0 (x^3 + x^2 + 0,25x - (1,5x^2 + 3,25x)) dx \right| = \left| \int_{-1,5}^0 (x^3 - 0,5x^2 - 3x) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 1,5x^2 \right]_{-1,5}^0 \right| = |0 - (1,265625 + 0,5625 - 3,375)| \approx 1,547$$

$$A_2 = \left| \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_0^2 (x^3 - 0,5x^2 - 3x) dx \right|$$

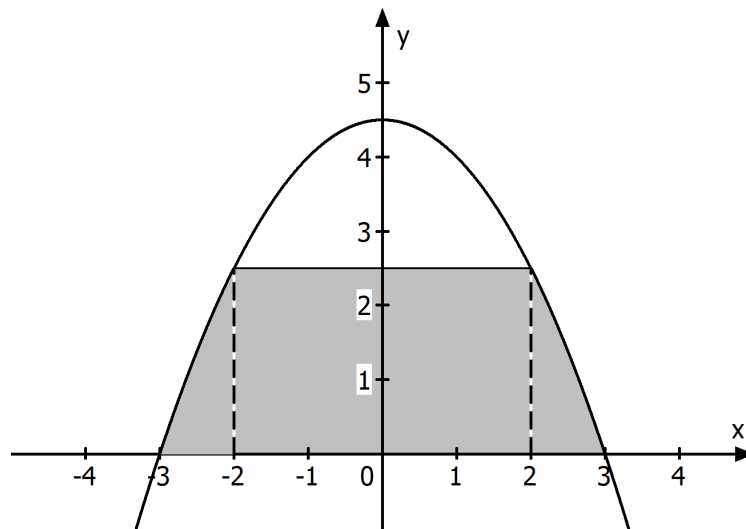
$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 1,5x^2 \right]_0^2 \right| = \left| 4 - \frac{8}{6} - 6 \right| \approx 3,33$$

Die gesamte Fläche beträgt $1,547 + 3,333 = 4,88$ Flächeneinheiten

Aufgabe 13:

Im ersten Schritt muss die Funktionsgleichung der Parabel ermittelt werden.

Skizze:



Ansatz für Parabelgleichung: $f(x) = a \cdot (x - 3)(x + 3)$

(da die Nullstellen $x = 3$ und $x = -3$ bekannt sind)

Einsetzen des bekannten Punktes $P(0/4,5)$: $4,5 = a \cdot (-9) \Rightarrow a = -0,5$

Parabelgleichung: $f(x) = -0,5(x - 3)(x + 3) = -0,5x^2 + 4,5$

Außerdem ist die Querschnittsfläche nach oben durch die Gerade $y = 2,5$ abgegrenzt.

Für die Berechnung der Querschnittsfläche werden die Schnittpunkte der Gerade $y = 2,5$ mit dem Schaubild von f benötigt:

$$-0,5x^2 + 4,5 = 2,5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Querschnittsfläche =

$$A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot \int_2^3 (-0,5x^2 + 4,5) dx = 4 \cdot 2,5 + 2 \cdot \left[-\frac{1}{6}x^3 + 4,5x \right]_2^3 = 10 + 2 \cdot \left(-4,5 + 13,5 - \left(-\frac{4}{3} + 9 \right) \right)$$

$$= 10 + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{38}{3} \text{ m}^2$$

$$\text{Wasservolumen: } \frac{38}{3} \text{ m}^2 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{152}{3} \text{ m}^3 \text{ pro Sekunde}$$

Aufgabe 14:

$$a) \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \cos(x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \cos(1) - (0 - \cos(0)) = 1,5 - \cos(1) = 0,96$$

$$\int_0^\pi f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \cos(x) \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \pi^2 - \cos(\pi) - (0 - \cos(0)) = 0,5\pi^2 + 2 = 6,93$$

$$b) \text{ Es gilt } f(2\pi) = 2\pi + \sin(2\pi) = 2\pi$$

Da die Gerade g den konstanten y-Wert $y = 2\pi$ besitzt, schneiden sich die Schaubilder bei $x = 2\pi$.

$$A = \int_0^{2\pi} (2\pi - (x + \sin(x))) dx = \left[2\pi \cdot x - \frac{1}{2} x^2 + \cos(x) \right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 - 2\pi^2 + \cos(2\pi) - \cos(0) = 2\pi^2$$

$$c) \text{ Punkt mit waagrechter Tangente im Bereich } 0 \leq x \leq 2\pi :$$

$$f'(x) = 1 + \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Der Punkt mit waagrechter Tangente besitzt die Koordinaten $P(\pi / \pi)$.

Die Gleichung der waagrechten Tangente lautet $y = \pi$.

Fläche unterhalb der waagrechten Tangente =

$$\int_0^\pi (\pi - (x + \sin(x))) dx = \left[\pi \cdot x - \frac{1}{2} x^2 + \cos(x) \right]_0^\pi = \pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 + \cos(\pi) - \cos(0) = 0,5\pi^2 - 2$$

$$\text{Daraus folgt: Fläche oberhalb der waagrechten Tangente} = 2\pi^2 - (0,5\pi^2 - 2) = 1,5\pi^2 + 2$$

$$\text{Flächenverhältnis: } \frac{A_{\text{oben}}}{A_{\text{unten}}} = \frac{1,5\pi^2 + 2}{0,5\pi^2 - 2} \approx \frac{5,725}{1} = 5,725 : 1$$

$$d) \text{ Die Tangente im Ursprung besitzt die Steigung } f'(0) = 2.$$

Gleichung der Tangente, die durch $O(0/0)$ verläuft: $y = 2x$

Schnittpunkt der waagrechten Gerade $y = 2\pi$ mit der Tangente:

$$2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$$

$$\text{Linke Fläche} = \text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \pi = \pi^2$$

$$\text{Rechte Fläche} = 2\pi^2 - \pi^2 = \pi^2$$

Die Tangente halbiert somit die Fläche, das Aufteilungsverhältnis ist 1:1.

Aufgabe 15:

a) Mittlere Temperatur 0 – 12 Uhr =

$$\frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} \left(15 - \frac{1}{20}(x-14)^2\right) dx = \frac{1}{12} \cdot \left[15x - \frac{1}{60}(x-14)^3\right]_0^{12} = \frac{1}{12} \cdot \left(180 + \frac{2}{15} - \left(-\frac{686}{15}\right)\right) = 11,2^\circ\text{C}$$

b) Mittlere Temperatur 12 – 24 Uhr =

$$\frac{1}{12} \cdot \int_{12}^{24} \left(15 - \frac{1}{20}(x-14)^2\right) dx = \frac{1}{12} \cdot \left[15x - \frac{1}{60}(x-14)^3\right]_{12}^{24} = \frac{1}{12} \cdot \left(360 - \frac{50}{3} - \left(180 + \frac{2}{15}\right)\right) = 13,6^\circ\text{C}$$

Aufgabe 16:

a) Die zurückgelegte Strecke des Läufers A ergibt sich als Integral über die Geschwindigkeitsfunktion:

$$\int_0^{9,8} v_A(t) dt = \left[0,125t^2 + 10 \cdot (t + e^{-t})\right]_0^{9,8} \approx 12,005 + 10 \cdot 9,8 - (0 + 10) \approx 100 \text{ Meter}$$

Da die zurückgelegte Strecke 100 m betragen muss, ist nachgewiesen, dass der Läufer ungefähr 9,8 Sekunden benötigt.

b) Es soll gelten:

$$\int_0^{9,69} v_B(t) dt = \left[12 \cdot (t + e^{-t}) + \frac{1}{3}mt^3\right]_0^{9,69} \approx 12 \cdot 9,69 + 303,28m - 12 = 104,28 + 303,28m$$

$$\text{Bedingung: } 104,28 + 303,28m = 100 \Rightarrow m = -0,0141$$