

Analysis

Integral und Flächeninhalt

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufliche Gymnasien: ab Klasse 12
Berufskolleg

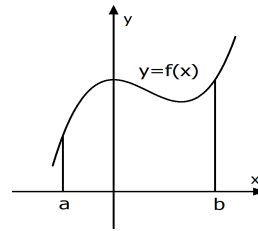
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f und der x -Achse über dem Intervall $I = [a; b]$



a) $f(x) = 2\cos(x)$, $I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

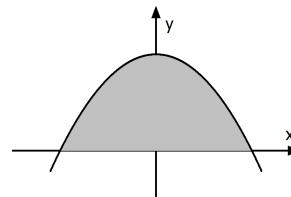
b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, $I = [1; 5]$

c) $f(x) = e^x$; $I = [-3; 1]$

d) $f(x) = \sin(2x + 1)$, $I = [0; \frac{\pi}{2}]$

Aufgabe 2:

Berechne den Inhalt der vom Schaubild der Funktion f und der x -Achse eingeschlossenen Fläche.



a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$

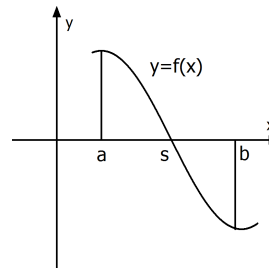
d) $f(x) = x - 4 + \frac{3}{x}$

e) $f(x) = 2\sin(x)$, $x \in [0; \pi]$

f) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$

Aufgabe 3:

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f und der x -Achse über dem Intervall $I = [a; b]$.



a) $f(x) = x^3$, $I = [-2; 2]$

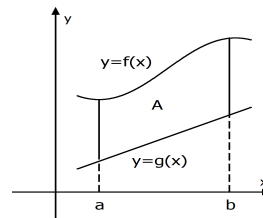
b) $f(x) = 2\sin(x)$; $I = [0; 2\pi]$

c) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $I = [\frac{1}{2}; 2]$

d) $f(x) = x^2 - x$, $I = [-1; 2]$

Aufgabe 4:

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen f und g über dem Intervall $I = [a; b]$ begrenzt wird.



a) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x + 1$, $I = [0; 2]$

b) $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^x$, $I = [-2; 1]$

c) $f(x) = 2\sin(x)$, $g(x) = 2\cos(x)$, $I = [0; \frac{\pi}{4}]$

d) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $I = [0; 1]$

Aufgabe 5:

Gib eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

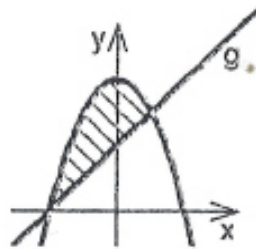
d) $f(x) = \frac{x^8 + 1}{x^2}$

e) $f(x) = (4x + 5)^3$

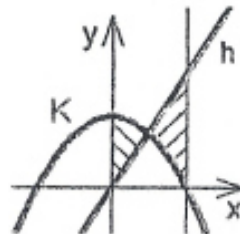
f) $f(x) = 8(x + 2)(x - 9)$

Aufgabe 6:

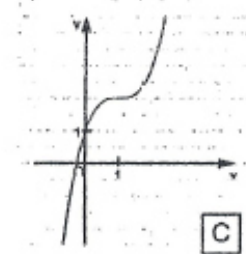
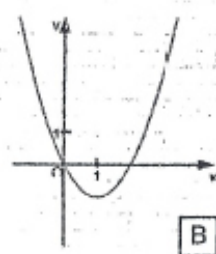
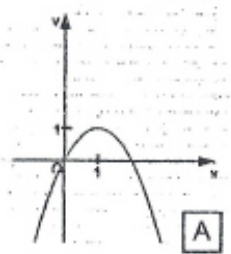
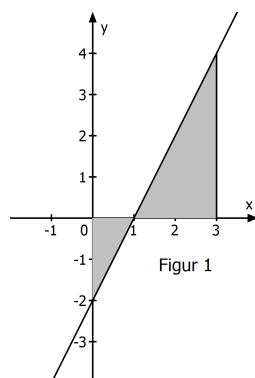
- a) Das schraffierte Flächenstück wird von der Parabel $y = 4 - x^2$ und der Geraden $g: y = x + 2$ eingeschlossen. Berechne seinen Flächeninhalt.



- b) Die Parabel K hat die Gleichung $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$. Bestimme eine Gleichung der Ursprungsgeraden h, so dass die beiden schraffierten Flächenstücke den gleichen Flächeninhalt haben.

**Aufgabe 7:**

- a) Drücke den Inhalt der getönten Flächenstücke in Figur 1 mithilfe von Integralen aus und berechne danach den Inhalt.
- b) Welche der unten abgebildeten Schaubilder A, B und C stellt eine Stammfunktion der in Figur 1 abgebildeten Randfunktion dar? Begründe anschaulich.



Lösungen
Aufgabe 1:

$$a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) dx = \left[2 \sin(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2 \cdot (-1) = 4 \text{ FE}$$

$$b) \int_1^5 \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx = \int_1^5 (x^{-2} + 1) dx = \left[-x^{-1} + x \right]_1^5 = \left[-\frac{1}{x} + x \right]_1^5 = -\frac{1}{5} + 5 - (-1 + 1) = 4,8 \text{ FE}$$

$$c) \int_{-3}^1 e^x dx = \left[e^x \right]_{-3}^1 = e - e^{-3} \approx 2,67 \text{ FE}$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + 1) dx = \left[-\cos(2x + 1) \cdot \frac{1}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0,5 \cos(\pi + 1) + 0,5 \cos(1) \approx 0,54 \text{ FE}$$

Aufgabe 2:

a) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) = -\frac{32}{3}, \text{ also } A = \frac{32}{3} \text{ FE}$$

b) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x - 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0$$

Satz vom Nullprodukt ergibt $x = 0$ oder $x = 4$.

$$\int_0^4 (x - 2\sqrt{x}) dx = \int_0^4 (x - 2x^{0,5}) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^4 = 8 - \frac{4}{3} \cdot 8 - (0) = -\frac{8}{3}$$

$$\text{also } A = \frac{8}{3} \text{ FE}$$

c) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\sqrt[3]{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x^2} - 1) dx = \int_{-1}^1 (x^{\frac{2}{3}} - 1) dx = \left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} - x \right]_{-1}^1 = \frac{3}{5} - 1 - \left(-\frac{3}{5} + 1 \right) = -0,8$$

$$\text{also } A = 0,8 \text{ FE}$$

d) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x - 4 + \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$\int_1^3 \left(x - 4 + \frac{3}{x}\right) dx = \int_1^3 (x - 4 + 3x^{-1}) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3\ln|x| \right]_1^3 = 4,5 - 12 + 3\ln(3) - (0,5 - 4 + 0) \\ = 3\ln(3) - 4 \approx -0,704$$

$$\text{also } A = 4 - 3\ln(3) \approx 0,704 \text{ FE}$$

e) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$2\sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = \pi$$

$$\int_0^\pi (2\sin(x)) dx = [-2\cos(x)]_0^\pi = -2\cos(\pi) + 2\cos(0) = 2 + 2 = 4$$

$$\text{also } A = 4 \text{ FE}$$

f) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$$

$$\int_1^2 \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}\right) dx = \int_1^2 (1 - 3x^{-1} + 2x^{-2}) dx = \left[x - 3\ln|x| - \frac{2}{x} \right]_1^2 = 2 - 3\ln(2) - 1 - (1 - 0 - 2) \\ = 2 - 3\ln(2) \approx -0,08$$

$$\text{also } A = 2 - 3\ln(2) \approx 0,08 \text{ FE}$$

Aufgabe 3:

a) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$A = \left| \int_{-2}^0 x^3 dx \right| + \left| \int_0^2 x^3 dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \right| = |0 - 4| + |4 - 0| = 8 \text{ FE}$$

b) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$2\sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$$

$$A = \left| \int_0^\pi 2\sin(x) dx \right| + \left| \int_\pi^{2\pi} 2\sin(x) dx \right| = \left| [-2\cos(x)]_0^\pi \right| + \left| [-2\cos(x)]_\pi^{2\pi} \right| = |2 - (-2)| + |-2 - 2| = 8 \text{ FE}$$

c) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$A = \left| \int_{0,5}^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx \right| + \left| \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx \right| = \left| [\ln|x| - x]_{0,5}^1 \right| + \left| [\ln|x| - x]_1^2 \right| \\ = |0 - 1 - (\ln(0,5) - 0,5)| + |\ln(2) - 2 - (0 - 1)| = |-0,5 - \ln(0,5)| + |-1 + \ln(2)| = 0,5$$

d) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ und } x = 1$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \right| \\ &= \left| 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0 \right| + \left| \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} \text{ FE} \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

$$\text{a) } A = \left| \int_0^2 (2x + 1 - (2x - 1)) dx \right| = \left| \int_0^2 2 dx \right| = \left| [2x]_0^2 \right| = 4 \text{ FE}$$

$$\text{b) } A = \left| \int_{-2}^1 (e^x - (-e^x)) dx \right| = \left| \int_{-2}^1 2e^x dx \right| = \left| [2e^x]_{-2}^1 \right| = 2e - 2e^{-2} \approx 5,17 \text{ FE}$$

$$\text{c) } A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos(x) - 2\sin(x)) dx \right| = \left| [2\sin(x) + 2\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \approx 0,83 \text{ FE}$$

$$\text{d) } A = \left| \int_0^1 (x^3 - x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 0 \right| = \frac{1}{12} \text{ FE}$$

Aufgabe 5:

$$\text{a) } F(x) = \frac{1}{6} x^6 \quad \text{b) } F(x) = \sin(x) \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^8 + 1}{x^2} = \frac{x^8}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^6 + x^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{7} x^7 - x^{-1}$$

$$\text{e) } F(x) = \frac{1}{4} (4x + 5)^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} (4x + 5)^4$$

$$\text{f) } f(x) = 8(x + 2)(x - 9) = 8(x^2 - 7x - 18) \Rightarrow F(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 - 3,5x^2 - 18x \right)$$

Aufgabe 6:

a) Berechnung der Schnittstellen der Funktionen:

$$4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (4 - x^2 - (x + 2)) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = 4,5 \text{ FE} \end{aligned}$$

b) Berechnung der Schnittstelle der Parabel mit der x-Achse:

$$2 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Die Gerade h besitzt die allgemeine Gleichung $y = m \cdot x$

Bedingung, damit die beiden Flächen gleich groß sind: $\int_0^2 (2 - \frac{1}{2}x^2 - mx) dx = 0$

$$\int_0^2 (2 - \frac{1}{2}x^2 - mx) dx = \left[2x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 \right]_0^2 = 4 - \frac{4}{3} - 2m = \frac{8}{3} - 2m$$

$$\text{Nun soll gelten: } \frac{8}{3} - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

Die Gerade besitzt die Gleichung $y = \frac{4}{3}x$.

Aufgabe 7:

a) Die Gerade besitzt die Gleichung $y = 2x - 2$ (y-Achsenabschnitt ist -2 und Steigung ist $m = 2$)

$$A_{\text{linkes Dreieck}} = -\int_0^1 (2x - 2) dx = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \text{ FE}$$

$$A_{\text{rechtes Dreieck}} = \int_1^3 (2x - 2) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ FE}$$

b) Die Gerade in Figur 1 besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von - nach +-

Somit muss das Schaubild der Stammfunktion bei $x = 1$ ein relatives Minimum (Tiefpunkt) haben. Es kommt nur das Schaubild B in Frage.