

Stochastik

Bernoulli-Experimente und Binomialverteilung

**Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufl. Gymnasien: ab Klasse 12**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Ist der Zufallsversuch eine Bernoulli-Kette?

Wenn ja, gib die Länge und die Trefferwahrscheinlichkeit an.

- a) Ein Würfel wird fünfzigmal geworfen. Es wird gezählt, wie oft eine gerade Augenzahl fällt.
- b) Ein Fußballspieler hat beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von 70%.
Er schießt zehn Elfmeter und dabei wird gezählt, wie oft er trifft.
- c) Ein Mathematik-Kurs besteht aus 11 Schülerinnen und 9 Schülern. Es werden 8 Personen ausgewählt und ihr Geschlecht notiert.
- d) Aus einer laufenden Produktion einer Maschine werden 30 Teile ausgewählt.
Die Maschine produziert mit einem Ausschuss von 5%. Es wird gezählt, wie viele Teile defekt sind.

Aufgabe 2: (mit WTR)

Ein Glücksrad besteht aus 4 gleich großen Feldern, die mit den Buchstaben A, B, C und D beschriftet sind.

Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Es wird gezählt, wie oft das Feld "A" kommt.

- a) Berechne $P(X = 4)$.
- b) Berechne $P(X = 0)$.
- c) Berechne $P(X \leq 2)$.

Aufgabe 3:

Wandle die Wahrscheinlichkeiten in die Gestalt $P(X \leq k)$ um, damit sie mit dem Taschenrechner berechnet werden können.

- a) $P(X \geq 5)$ b) $P(X > 14)$ c) $P(X < 12)$
- d) $P(3 \leq X \leq 10)$ e) $P(3 < X < 10)$

Aufgabe 4: (mit WTR)

Herr Maier muss jeden Morgen auf dem Weg zur Arbeit eine Ampel überqueren.

Die Ampel zeigt rot mit einer Wahrscheinlichkeit von 25%.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Maier innerhalb eines Monats (mit 22 Arbeitstagen)

- a) genau fünfmal warten muss
- b) höchstens fünfmal warten muss
- c) mindestens achtmal warten muss
- d) weniger als sechsmal warten muss
- e) mehr als zehnmal warten muss
- f) nie warten muss
- g) mindestens fünf und höchstens zwölfmal warten muss
- h) weniger als fünfzehnmal und mehr als sechsmal warten muss

Aufgabe 5: (mit WTR)

In einer Urne befinden sich 12 schwarze und 4 weiße Kugeln. Es werden 12 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der schwarzen Kugeln.

- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf schwarze Kugeln gezogen werden.
- b) Berechne $\mu = E(X)$ (Erwartungswert von X) und interpretiere diesen Wert.
- c) Berechne $P(X = \mu)$ und $P(\mu - 1 \leq X \leq \mu + 1)$.

Aufgabe 6: (mit WTR)

Ein Jäger trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit 40%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen

- a) genau sechs Treffer b) mehr als sechs Treffer?

Aufgabe 7: (mit WTR)

Bei einem Automaten gewinnt man in 30% aller Spiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

- a) bei 10 Spielen mindestens einmal gewinnt?
b) bei 20 Spielen achtmal gewinnt?

Aufgabe 8: (mit WTR)

In einem "Nachrichtenkanal" wird ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,9$ richtig übertragen. Eine Nachricht besteht aus acht Zeichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen?

Aufgabe 9: (mit WTR)

Ein idealer Würfel wird 36-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl 6 in der erwarteten Anzahl eintritt.

Aufgabe 10: (mit WTR)

Eine Firma produziert einen bestimmten Massenartikel mit einem Ausschussanteil von 4%. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Artikeln mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel befinden.

Aufgabe 11: (mit WTR)

Ein idealer Würfel wird 18-mal geworfen.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Gib die Ereignisse in Prozent an und runde auf eine Dezimale.

- A: Es wird 6-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.
B: Es wird mehr als 4-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.
C: Es wird mindestens 4-mal aber höchstens 7-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

Aufgabe 12: (mit WTR)

Bei einer Lostombola beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 10%.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 90 Losen höchstens 10-mal gewinnt?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt man bei 100 Losen auf mindestens 16 Treffer?
c) Ein Loskäufer kann auch Säckchen kaufen, die je 10 zufällig ausgewählte Lose enthalten. Der Losverkäufer verspricht mindestens einen Gewinn, ansonsten wird das Geld zurückerstattet. Wie groß ist das Risiko, dass der Losverkäufer zahlen muss?

Aufgabe 13: (mit WTR)

Wie oft muss man einen idealen Würfel mindestens werfen, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens eine Sechs haben will?

Aufgabe 14: (mit WTR)

In einer Fabrik werden die hergestellten Teile von einer Kontrolleurin überprüft, die jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% richtig beurteilt.

- a) Ab welcher Anzahl von untersuchten Teilen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrolleurin mindestens eines davon falsch beurteilt, größer als 99,9%?
- b) Bei einer anderen Kontrolleurin liegt die Wahrscheinlichkeit, von 100 untersuchten Teilen mindestens drei falsch zu beurteilen, bei etwa 75%.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit beurteilt diese Kontrolleurin ein von ihr untersuchtes Teil falsch? (Ergebnis in Prozent, auf eine Dezimale gerundet).

Aufgabe 15: (mit WTR)

In einem Unternehmen werden Sauerkirschen maschinell entsteint und dann in Gläser abgefüllt. 1,5% der fertigen Kirschen haben trotzdem noch ihren Kern.

- a) Herr Becker backt einen Kirschkuchen. Dafür nimmt er 120 dieser Kirschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dem Kuchen mindestens ein Kirschkern befindet?
- b) Wie viele Kirschkerne sind in einem solchen Kuchen zu erwarten?
- c) Wie viele Kirschen dürfte Herr Becker für seinen Kuchen höchstens nehmen, damit er mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit keinen Kern darin hat?
- d) Wie groß darf die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kirsche noch ihren Kern hat, sein, damit sich mit ca. 79% Wahrscheinlichkeit in einem Kirschkuchen mit 120 Kirschen kein Kirschkern befindet?
(Ergebnis in Prozent, auf zwei Dezimalen gerundet)

Lösungen

Aufgabe 1:

- a) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 50$ und $p = 0,5$.
- b) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 10$ und $p = 0,7$
- c) nein, es ist keine Bernoulli-Kette, da es sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt und sich die Trefferwahrscheinlichkeit pro Ziehung ändert
- d) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 30$ und $p = 0,05$.
(es ist zwar wie in c) eine Ziehung ohne Zurücklegen, aber die Trefferwahrscheinlichkeit bleibt gleich, weil es sich um eine Ziehung aus einer laufenden Produktion handelt).

Aufgabe 2:

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,25$.

- a) $P(X = 4) \approx 0,146$
- b) $P(X = 0) \approx 0,056$
- c) $P(X \leq 2) \approx 0,526$

Aufgabe 3:

- a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$
- b) $P(X > 14) = 1 - P(X \leq 14)$
- c) $P(X < 12) = P(X \leq 11)$
- d) $P(3 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 2)$
- e) $P(3 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3)$

Aufgabe 4:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Fälle an, bei denen die Ampel rot ist.

X ist binomialverteilt mit $n = 22$ und $p = 0,25$.

- a) $P(X = 5) = 0,193$
- b) $P(X \leq 5) = 0,517$
- c) $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 0,162$
- d) $P(X < 6) = P(X \leq 5) = 0,517$
- e) $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 0,01$
- f) $P(X = 0) = 0,0018$
- g) $P(5 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 4) = 0,676$
- h) $P(6 < X < 15) = P(X \leq 14) - P(X \leq 6) = 0,3$

Aufgabe 5:

X ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = \frac{12}{16} = 0,75$

- a) $P(X = 5) = 0,0115$
- b) $\mu = E(X) = n \cdot p = 12 \cdot 0,75 = 9$
Interpretation: Wenn dieses Spiel sehr häufig durchgeführt wird, kann man im Durchschnitt mit 9 gezogenen schwarzen Kugeln rechnen.
- c) $P(X = \mu) = P(X = 9) = 0,258$
 $P(\mu - 1 \leq X \leq \mu + 1) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,684$

Aufgabe 6:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,4$.

- a) $P(\text{genau 6 Treffer}) = P(X = 6) \approx 0,1115 = 11,15\%$
- b) $P(\text{mehr als 6 Treffer}) = P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0,945 = 0,055 = 5,5\%$

Aufgabe 7:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnenen Spiele an.

a) X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,3$.

$$P(\text{mindestens ein Gewinn}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,972 = 97,2\%$$

b) X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,3$.

$$P(\text{genau 8 Gewinne}) = P(X = 8) \approx 0,114 = 11,4\%$$

Aufgabe 8:

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der falsch übertragenen Zeichen.

X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0,1$.

(Begründung: Die "Trefferwahrscheinlichkeit" für ein falsch übertragenes Zeichen beträgt $1 - 0,9 = 0,1$)

$$P(\text{höchstens zwei Zeichen falsch}) = P(X \leq 2) \approx 0,962 = 96,2\%$$

Aufgabe 9:

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gewürfelten Sechser.

X ist binomialverteilt mit $n = 36$ und $p = \frac{1}{6}$.

Die erwartete Anzahl der Sechser beträgt $E(X) = n \cdot p = 36 \cdot \frac{1}{6} = 6$.

Bei 36 Würfeln ist im Erwartungswert mit 6 Sechsern zu rechnen.

$$P(\text{genau 6 Sechser}) = P(X = 6) \approx 0,176 = 17,6\%$$

Aufgabe 10:

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Ausschussartikel.

X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,04$.

$P(\text{mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel}) =$

$$P(2 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) \approx 0,8936 - 0,0872 = 0,8064 = 80,64\%$$

Aufgabe 11:

Ereignis A:

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Würfe, die größer als 4 sind.

X ist binomialverteilt mit $n = 18$ und $p = \frac{1}{3}$.

$$P(A) = P(X = 6) \approx 0,196$$

Ereignis B:

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Würfe, die größer als 4 sind.

X ist binomialverteilt mit $n = 18$ und $p = \frac{1}{3}$.

$$P(B) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0,769$$

Ereignis C:

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Würfe, die größer als 4 sind.

X ist binomialverteilt mit $n = 18$ und $p = \frac{1}{3}$.

$$P(C) = P(4 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3) \approx 0,7767 - 0,1017 = 0,675$$

Aufgabe 12:

a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen Gewinne.

X ist binomialverteilt mit $n = 90$ und $p = 0,1$.

$$P(\text{höchstens 10 Gewinne}) = P(X \leq 10) \approx 0,713 = 71,3\%$$

b) X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,1$.

$$P(\text{mindestens 16 Treffer}) = P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) \approx 1 - 0,96 = 0,04 = 4\%$$

c) X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,1$.

$$P(\text{Veranstalter muss zahlen}) = P(\text{kein Gewinn}) = P(X = 0) \approx 0,349 = 34,9\%$$

Aufgabe 13:

1. Möglichkeit:

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Sechser.

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{6}$

Es soll gelten: $P(X \geq 1) > 0,9$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,9 \quad \Leftrightarrow -P(X = 0) > -0,1 \quad \Leftrightarrow P(X = 0) < 0,1$$

(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

Es gilt $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, da $P(X = 0)$ bedeutet, dass bei n Versuchen keine Sechse gewürfelt werden soll.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1 \quad \stackrel{\ln}{\Leftrightarrow} \quad \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < \ln(0,1) \quad \Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0,1) \quad \stackrel{:\ln(5/6)}{\Leftrightarrow} \quad n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(5/6)}$$

(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

$$\Leftrightarrow n > 12,6$$

Man muss mindestens 13 mal würfeln.

2. Möglichkeit:

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Sechser.

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{6}$

Es soll gelten: $P(X \geq 1) > 0,9 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,9$

Mit dem WTR ergibt sich durch Ausprobieren für verschiedene Werte von n :

Für $n = 12$ gilt $1 - P(X = 0) \approx 0,888$

Für $n = 13$ gilt $1 - P(X = 0) \approx 0,907$

Man muss mindestens 13mal würfeln.

Aufgabe 14:**a) 1. Möglichkeit:**

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Teile, die falsch beurteilt werden.

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,03$.

Es soll gelten: $P(X \geq 1) > 0,999$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,999 \quad \Leftrightarrow -P(X = 0) > -0,001 \quad \Leftrightarrow P(X = 0) < 0,001$$

(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

Es gilt $P(X = 0) = 0,97^n$, da $P(X = 0)$ bedeutet, dass bei n Versuchen kein Teil falsch beurteilt wird.

$$0,97^n < 0,001 \quad \stackrel{\ln}{\Leftrightarrow} \quad \ln 0,97^n < \ln(0,001) \quad \Leftrightarrow n \cdot \ln(0,97) < \ln(0,001)$$

$$\stackrel{:\ln 0,97}{\Leftrightarrow} n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,97)}$$

(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

$$\Leftrightarrow n > 226,8$$

Die Kontrolleurin muss mindestens 227 Teil beurteilen.

2. Möglichkeit:

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Teile, die falsch beurteilt werden.

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,03$.

Es soll gelten: $P(X \geq 1) > 0,999 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,999$

Mit dem WTR ergibt sich durch Ausprobieren für verschiedene Werte von n :

Für $n = 226$ gilt $1 - P(X = 0) \approx 0,99898$

Für $n = 227$ gilt $1 - P(X = 0) \approx 0,99901$

Die Kontrolleurin muss mindestens 227 Teil beurteilen.

- b) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Teile, die falsch beurteilt werden.
 X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und unbekanntem p .

Es gilt $P(X \geq 3) \approx 0,75$.

Daraus folgt $1 - P(X \leq 2) \approx 0,75$.

Mit dem WTR muss man nun verschiedene Werte von p ausprobieren.

Für $p = 0,039$ ergibt sich $1 - P(X \leq 2) \approx 0,75$

Die Kontrolleurin beurteilt ein von ihr untersuchtes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,9% falsch.

Aufgabe 15:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Kirschen an, die noch einen Kern haben.

- a) X ist binomialverteilt mit $n = 120$ und $p = 0,015$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,837$
- b) X ist binomialverteilt mit $n = 120$ und $p = 0,015$.
Der Erwartungswert beträgt $E(X) = n \cdot p = 120 \cdot 0,015 = 1,8$ Kerne.
- c) X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,015$.
Es soll gelten: $P(X = 0) \geq 0,8$

Es gilt $P(X = 0) = 0,985^n$.

$$0,985^n \geq 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\ln}{\ln 0,985^n \geq \ln(0,8)} \Leftrightarrow n \cdot \ln(0,985) \geq \ln(0,8)$$

$$\overset{:\ln 0,985}{\Leftrightarrow} n \leq \frac{\ln(0,8)}{\ln(0,985)}$$

(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

$$\Leftrightarrow n \leq 14,8$$

Herr Becker dürfte höchstens 14 Kirschen nehmen.

2. Möglichkeit:

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,015$.

Es soll gelten: $P(X = 0) \geq 0,8$

Mit dem WTR ergibt sich durch Ausprobieren für verschiedene Werte von n :

Für $n = 14$ gilt $P(X = 0) \approx 0,8093$

Für $n = 15$ gilt $P(X = 0) \approx 0,797$

Herr Becker dürfte höchstens 14 Kirschen nehmen.

d) X ist binomialverteilt mit $n = 120$ und unbekanntem p .

Es soll gelten: $P(X = 0) \approx 0,79$

Mit dem WTR muss man nun verschiedene Werte von p ausprobieren.

Für $p = 0,002$ ergibt sich $P(X = 0) \approx 0,786$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,2%.