Analysis

Trigonometrische Funktionen: komplettes Stoffgebiet
Wahlteilaufgaben

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufl. Gymnasien: ab Klasse 12

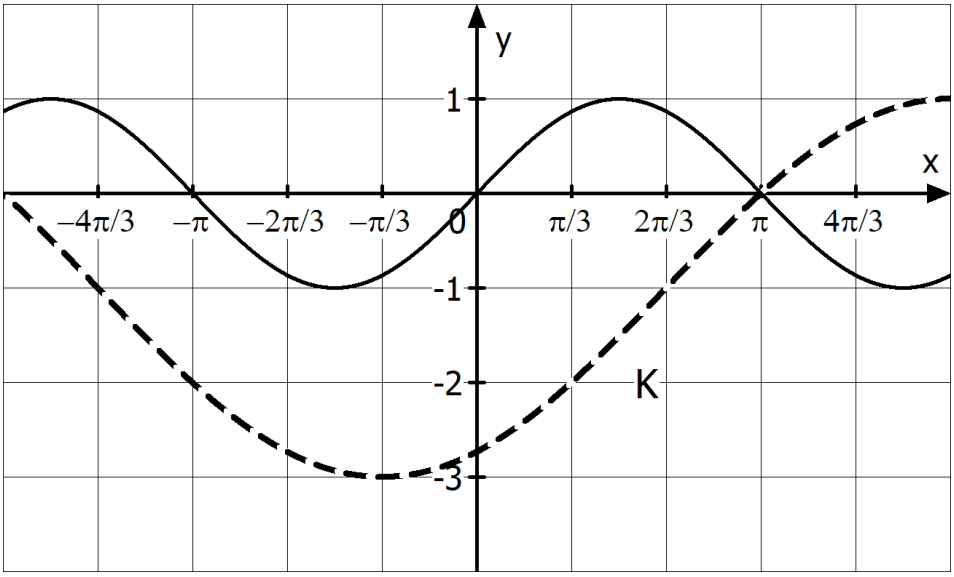
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2018

Aufgabe 1:

Im abgebildeten Koordinatensystem ist neben der Sinuskurve noch ein weiteres Schaubild K einer trigonometrischen Funktion f gezeichnet.



a) Die Periodenlänge von K ist ein natürliches Vielfaches von π. Bestimme die Periodenlänge und die Amplitude von K.

b) Die Funktionsgleichung von f ist vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$
Bestimme die Parameter a, b, c und d.

c) K begrenzt im 4.Quadranten mit den Koordinatenachsen eine Fläche mit Inhalt A. Berechne A. Runde auf drei Dezimalen.

d) Bestimme rechnerisch die Extremstellen von f im Intervall [-4 ; 6]. Runde auf zwei Dezimalen. Es genügt der notwendige Nachweis.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -1{,}5 \sin(\pi x + 2\pi)$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.

a) Beschreibe, wie K aus der Standardsinuskurve durch geeignete Abbildungen erzeugt werden kann. Welche Periodenlänge hat K?
Skizziere K im Intervall [0 ; 4].

b) Gib die Nullstellen von f im Intervall [0; 4] an.
Gib die Koordinaten der Hochpunkte von K für $-1 \le x \le 2$ an.

c) Welche Größe A hat die Fläche, welche K für $0 \le x \le 2$ mit der x-Achse begrenzt?

d) Die Normale im Punkt P(2/0) begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne die längste Seite des Dreiecks.

Lösung

Aufgabe 1:

a) Die Periodenlänge ergibt sich durch Betrachung der Punkte $A(-\frac{\pi}{3}/-3)$ und $B(\frac{2}{3}\pi/-1)$.

Der waagrechte Abstand der Punkte beträgt $\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=\pi$.

Dies entspricht einem Viertel der Periodenlänge von K.
Somit ist die Periodenlänge 4π.

Die Amplitude beträgt a = 2.

b) $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x+c))+d$

Es gilt a = 2 (Amplitude).

Berechnung von b mit der Periodenlänge: $p=\frac{2\pi}{b}\Rightarrow b=\frac{2\pi}{4\pi}=0{,}5$

Es gilt $d=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{1+(-3)}{2}=-1$

Berechnung von c:

Der Punkt $B(\frac{2}{3}\pi/-1)$ entspricht bei einer Standardsinuskurve dem Ursprungspunkt.

Somit ist das Schaubild K gegenüber einer Standardsinuskurve um $\frac{2}{3}\pi$ nach rechts verschoben. Daher gilt $c=-\frac{2}{3}\pi$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x)=2\cdot\sin(0{,}5\cdot(x-\frac{2}{3}\pi))-1=2\cdot\sin(0{,}5x-\frac{1}{3}\pi)-1$.

c) Berechnung der Fläche:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\left[-2\cdot\cos(0{,}5x-\frac{1}{3}\pi)\cdot\frac{1}{0{,}5}-x\right]_0^{\pi}=-4\cos(\frac{1}{6}\pi)-\pi-(-4\cos(-\frac{1}{3}\pi)-0)\approx-4{,}606$$

Das Integral ist negativ, da sich die Fläche unterhalb der x-Achse befindet.

Der Flächeninhalt beträgt A = 4,606 FE.

d) Ableitung von f(x):

$$f'(x)=2\cdot\cos(0{,}5x-\frac{1}{3}\pi)\cdot0{,}5=\cos(0{,}5x-\frac{1}{3}\pi)$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x)=0$

$\cos(0,5x-\frac{1}{3}\pi)=0$

$\Rightarrow 0,5x-\frac{1}{3}\pi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{3}\pi\approx 5,236$

$\Rightarrow 0,5x-\frac{1}{3}\pi=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\pi\approx -1,047$

$\Rightarrow 0,5x-\frac{1}{3}\pi=-\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=-\frac{7}{3}\pi\approx -7,33$ liegt nicht im vorgegebenen Intervall

Die Ergebnisse können auch anhand des Schaubildes K überprüft werden.

Aufgabe 2:

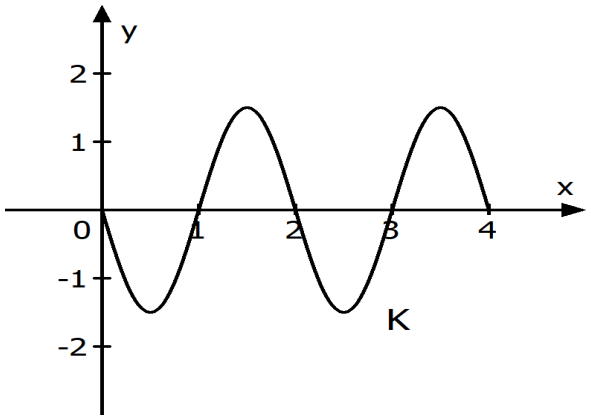
a) Umschreiben der Funktionsgleichung: $f(x)=-1,5\sin(\pi x+2\pi)=-1,5\sin(\pi(x+2))$

Entstehung K aus der Standardsinuskurve $y=\sin(x)$

1.) Streckung des Schaubildes mit dem Faktor 1,5 in y-Richtung: $y=1,5\sin(x)$
2.) Spiegelung des Schaubildes an der x-Achse: $y=-1,5\sin(x)$
3.) Streckung des Schaubildes mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung: $y=-1,5\sin(\pi x)$
4.) Verschiebung des Schaubildes um 2 nach links: $y=-1,5\sin(\pi(x+2))$

Periodenlänge: $p=\frac{2\pi}{\pi}=2$

Skizze:



b) Nullstellen: x = 0 und x = 1 und x = 2 und x = 3 und x = 4.

Hochpunkte: H(-0,5/1,5) und H*(1,5/1,5)

c) Es gilt $\int_0^1 f(x)dx=\left[1,5\cos(\pi x+2\pi)\cdot\frac{1}{\pi}\right]_0^1=1,5\cdot\cos(3\pi)\cdot\frac{1}{\pi}-1,5\cdot\cos(2\pi)\cdot\frac{1}{\pi}=-\frac{3}{\pi}$

Für die gesuchte Fläche gilt $A=2\cdot\frac{3}{\pi}=\frac{6}{\pi}$

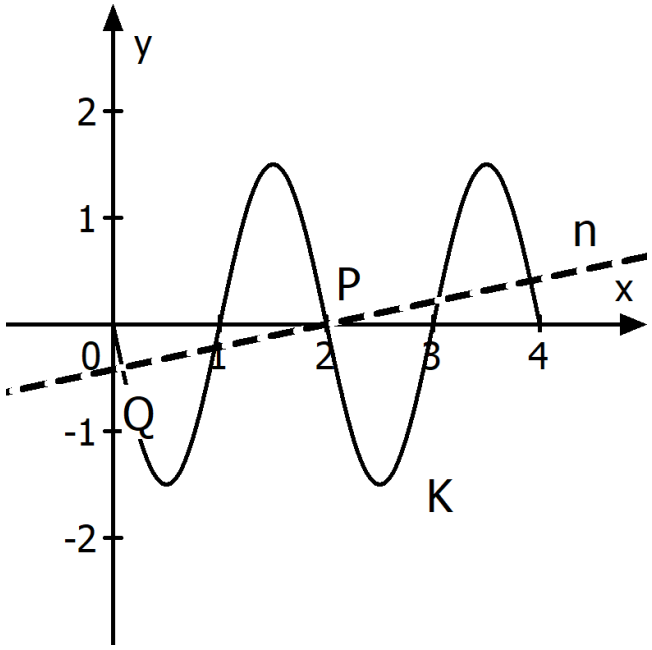
d) Ansatz für Normale: $y = mx + c$

Es gilt $f'(x) = -1{,}5\cos(\pi x + 2\pi)\cdot\pi$
Steigung der Tangente an der Stelle x = 2: $f'(2) = -1{,}5\pi$

Steigung der Normale an der Stelle x = 2: $m_N = -\frac{1}{-1{,}5\pi} \approx 0{,}2122$

Einsetzen der Steigung und des Punktes P(2/0) in die Normale:
$0 = 0{,}2122\cdot 2 + c \Rightarrow c = -0{,}4244$

Normalengleichung: $y = 0{,}2122x - 0{,}4244$



Die längste Seite des Dreiecks OPQ mit O(0/0), P(2/0) und Q(0/-0,4244) ist die Seite $\overline{PQ}$.

Gemäß dem Satz von Pythagoras gilt: $\overline{PQ} = \sqrt{2^2 + 0{,}4244^2} \approx 2{,}04$