

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra (a) 4 BE b) 3 BE c) 2 BE d) 4 BE e) 4 BE f) 3 BE)

Im mittelamerikanischen Regenwald wird eine neu entdeckte Pyramide vermessen. Die Eckpunkte der Grundfläche sind $A(20|40|0)$, $B(-60|20|0)$, $C(-40|-60|0)$ und $D(40|-40|0)$. Die Spitze der Pyramide befindet sich bei $S(-10|-10|25)$. Alle Angaben sind in Metern.

- a) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem.
- b) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist.
- c) Zeigen Sie, dass sich die Spitze der Pyramide senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats befindet.
- d) Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie man die Inhalte der vier Seitenflächen der Pyramide mit den angegebenen Informationen und den Erkenntnissen aus den Teilaufgaben b) und c) berechnen kann.

(Hinweis: Die Berechnung selbst ist nicht notwendig.)

Vom Mittelpunkt der Kante AB aus verläuft ein kleiner Schacht zur Kante CS. Ein einziges Mal im Jahr scheint die Sonne durch diesen Schacht hindurch, d.h. die Sonnenstrahlen sind parallel zum Schacht. In diesem Fall haben die Strahlen die Richtung des Vektors $\vec{v}$:

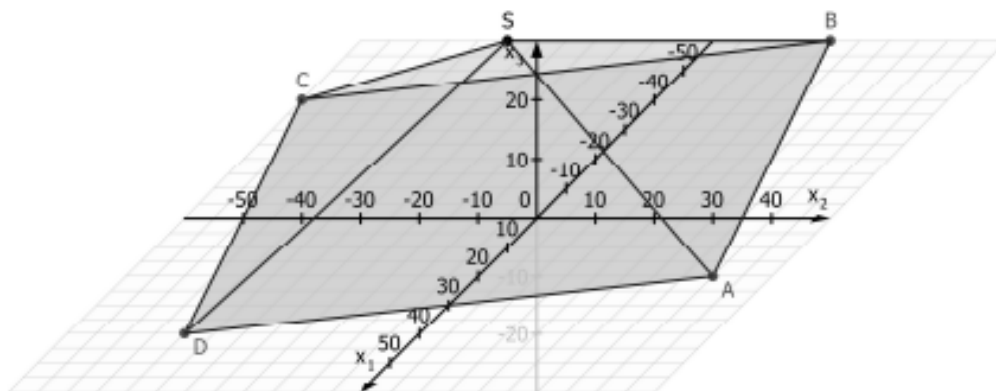
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ 80 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- e) Ermitteln Sie den Punkt auf der Kante CS, an dem der Schacht aus der Pyramide austritt.
- f) Berechnen Sie den Steigungswinkel des Schachtes.

Lösungen

3 Lineare Algebra

a) Skizze:



b) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -80 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$, daher ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -80 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix} = -1600 + 1600 = 0$ sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und

$\overrightarrow{BC}$ orthogonal zueinander. Somit existiert ein rechter Winkel im Punkt B und das Viereck ABCD ist damit ein Rechteck.

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-80)^2 + (-20)^2} = \sqrt{6800}$ sind die benachbarten Seiten AB und BC gleich lang. Somit ist das Viereck ABCD ein Quadrat.

c) Der Mittelpunkt M des Quadrats ist der Mittelpunkt der Diagonalen AC:

$$M\left(\frac{20-40}{2} \mid \frac{40-60}{2} \mid \frac{0+0}{2}\right) \text{ also } M(-10 \mid -10 \mid 0)$$

Da das Quadrat ABCD in der x_1x_2 -Ebene liegt (da die Koordinaten von A,B,C,D alle den x_3 -Wert Null haben) und die Spitze S(-10|-10|25) in den x_1 - und x_2 -Koordinaten der Punkte M und S übereinstimmen, liegt die Spitze S genau senkrecht über dem Mittelpunkt M.

- d) Die Spitze der Pyramide steht senkrecht über der Mitte M der quadratischen Grundfläche, daher haben alle vier Seitenflächen (gleichschenklige Dreiecke) den gleichen Inhalt.

Die Berechnung des Flächeninhalts des gleichschenkligen Dreiecks ABS kann wie folgt durchgeführt werden:

- Die Länge der Grundseite g des Dreiecks ABS wird berechnet mit $|\overline{AB}|$
- Die Höhe h des Dreiecks ABS wird berechnet mit $|\overline{ZS}|$, wobei Z der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

$$\text{Flächeninhalt einer Seitenfläche: } A_{\text{ABS}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{ZS}|$$

- e) Mittelpunkt von AB: $M_{\text{AB}}\left(\frac{20-60}{2} \mid \frac{40+20}{2} \mid \frac{0+0}{2}\right)$ also $M(-20 \mid 30 \mid 0)$

$$\text{Der Schacht liegt in der Gerade g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 80 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die Kante CS liegt in der Gerade h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Geraden g und h:

$$\begin{array}{rclcl} -20 & +14t & = & -40 & +30r \\ 30 & +80t & = & -60 & +50r \\ -5t & = & & & 25r \end{array}$$

Aus Zeile 3 folgt: $t = -5r$

$$\text{Einsetzen in Zeile 2: } 30 + 80 \cdot (-5r) = -60 + 50r \Leftrightarrow r = \frac{1}{5}$$

$$\text{Daraus folgt } t = -5 \cdot \frac{1}{5} = -1$$

$$\text{Kontrolle mit Zeile 1: } -20 + 14 \cdot (-1) = -40 + 30 \cdot \frac{1}{5} \text{ ist eine wahre Aussage}$$

Einsetzen von $t = -1$ in g ergibt den Schnittpunkt $P(-34 \mid -50 \mid 5)$.

- f) Der Steigungswinkel des Schachtes ist der Schnittwinkel der Gerade g mit der x_1x_2 -Ebene:

Normalenvektor der x_1x_2 -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 14 \\ 80 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{14^2 + 80^2 + (-5)^2} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{6621}} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{6621}}\right) \approx 3,5^\circ$$