Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra

3.1 (a) 2 BE b) 1 BE c) 2 BE d) 3 BE e) 3 BE)

Die drei Punkte P(-1|0|-6), Q(0|-1|0) und R(0|0|-2) liegen in der Ebene E.

Die Gerade g ist gegeben durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an.

b) Ermitteln Sie den Spurpunkt der Ebene E mit der x_1-Achse.

c) Geben Sie die besondere Lage der Gerade g im Koordinatensystem an und begründen Sie Ihre Angabe.

d) Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Gerade g die x_1x_2-Ebene durchstößt.

e) Geben Sie die Koordinaten des Punktes S an, in dem die Gerade g die x_1x_2-Ebene durchstößt.

Der Punkt T(1|3|-4) liegt in der Ebene E. Der Punkt U entsteht durch senkrechte Projektion des Punktes T auf die x_1x_2-Ebene.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks STU.

3.2 (a) 4 BE b) 5 BE)

Gegeben sind die Punkte A(-1|7|6), B(1|3|8), C(-3|-9|-1) und D(-5|-5|-3).

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und D ein Parallelogramm, aber kein Rechteck bilden.

b) M ist der Mittelpunkt der Strecke AB und N ist der Mittelpunkt der Strecke BC. Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt der Strecken DM und AN die Strecke DM im Verhältnis 4:1 teilt.

Lösungen

3 Lineare Algebra

3.1

a) Gleichung der Ebene E: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Der Spurpunkt mit der x_1-Achse hat die Koordinaten $S_1(x_1 \mid 0 \mid 0)$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aus der 2.Zeile folgt r = 0.
Aus der 3.Zeile folgt $-6 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1{,}5$
Aus der 1.Zeile folgt $x_1 = -1 + 0 + 1{,}5 = 0{,}5$

Der Spurpunkt hat die Koordinaten $S_1(0{,}5 \mid 0 \mid 0)$.

c) Die Gerade g ist parallel zur x_1x_3 -Ebene, da der zweite Eintrag des Richtungsvektors 0 ist.

d) Der Normalenvektor der x_1x_2-Ebene hat die Koordinaten $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\sin(\alpha) = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{1}} = \dfrac{4}{5} \quad \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(\dfrac{4}{5}) \approx 53{,}1°$

e) Der Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene hat die Koordinaten $S(x_1 \mid x_2 \mid 0)$.

Punktprobe mit g: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aus der 3.Zeile folgt s = 0.
Daraus folgt $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten S(-2|3|0).

Der Punkt U als senkrechte Projektion von T auf die x_1x_2-Ebene hat die Koordinaten U(1|3|0).

Das Dreieck STU ist im Punkt U rechtwinklig, da der Vektor $\overrightarrow{SU} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der x_1x_2-Ebene liegt und der Punkt T genau senkrecht über U liegt.

$$A_{STU} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{SU}\right| \cdot \left|\overrightarrow{UT}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ FE}$$

3.2

a) Die Punkte ABCD bilden ein Parallelogramm, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt.

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$, was zu zeigen war.

Das Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn im Punkt A ein rechter Winkel existiert.
In diesem Fall müssten die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ orthogonal zueinander sein.

Es gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} = -8 + 48 - 18 \neq 0$.
Damit sind die Vektoren nicht orthogonal und es liegt kein Rechteck vor.

b) Koordinaten von M: $M(\frac{-1+1}{2} | \frac{7+3}{2} | \frac{6+8}{2})$, also M(0|5|7)

Koordinaten von N: $N(\frac{1-3}{2} | \frac{3-9}{2} | \frac{8-1}{2})$, also N(-1|-3|3,5)

Schnittpunkt der Strecken DM und AN:

$$g_{DM} : \vec{x} = \overrightarrow{OD} + r \cdot \overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } g_{AN} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Geraden:

$$\begin{array}{lllll} -5 & +5r & = & -1 & \\ -5 & +10r & = & 7 & -10s \\ -3 & +10r & = & 6 & -2{,}5s \end{array}$$

Aus Zeile 1 folgt $r = \frac{4}{5}$.

Aus Zeile 2 folgt $-5 + 8 = 7 - 10s \Leftrightarrow s = \frac{2}{5}$

Aus Zeile 3 ergibt sich eine wahre Aussage: $-3 + 8 = 6 - 1$

Daraus folgt, dass sich die Geraden schneiden, der Schnittpunkt sei Z.

Aus der Geradengleichung g_{DM} folgt $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OD} + \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{DM}$

Aus dem Wert von $r = \frac{4}{5}$ ergibt sich das Verhältnis 4:1.