Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

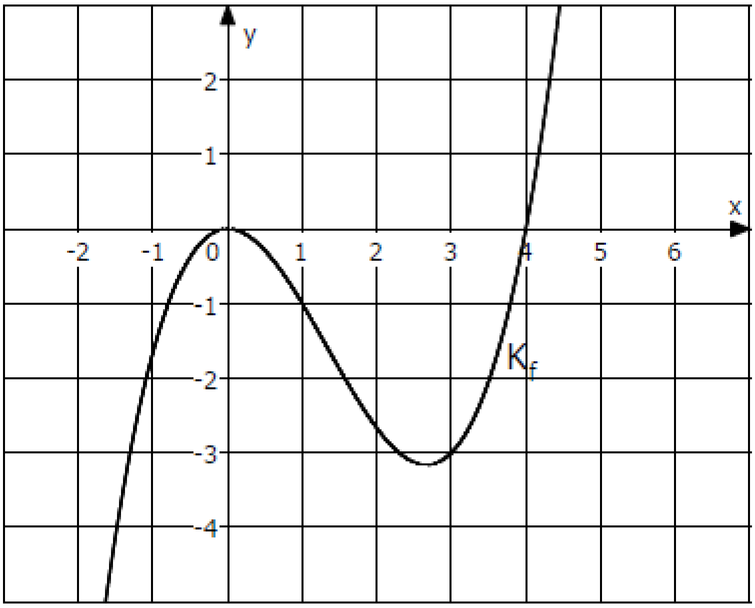
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

1 Analysis

1.1 (a) 2 BE b) 4 BE c) 5 BE d) 3 BE e) 3 BE f) 4 BE))

Für eine reelle Zahl a ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f gegeben durch $f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x-4)$. Der Graph von f ist K_f.



a) Ermitteln Sie den Wert von a.

Im Folgenden gilt $a = \frac{1}{3}$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes von K_f.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Wendetangente w an K_f die x-Achse schneidet.

d) Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s geht aus K_f durch Verschiebung um $\frac{4}{3}$ in negative x-Richtung sowie eine Verschiebung in y-Richtung hervor.

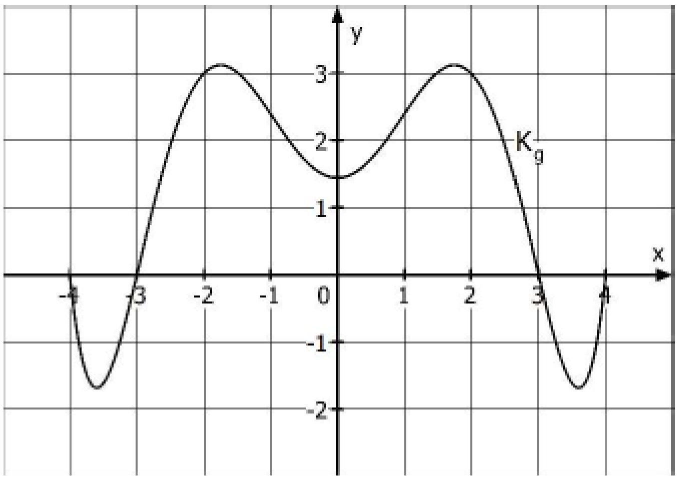
Es gilt $s(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{9}x$.
Zeigen Sie unter Verwendung der Funktionsgleichung von s'', dass der Graph von f an der Stelle 1 rechtsgekrümmt ist.

e) Der Ursprung, der Punkt P(u|0) und der Punkt Q(u|f(u)) bilden für $0{,}5 \le u \le 3{,}5$ im 4.Quadranten ein Dreieck mit dem Flächeninhalt A(u). Erläutern Sie die Bedeutung der Stelle u, die mit folgender Rechnung ermittelt wird:
$A'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 3$
Dabei gilt: $A''(3) < 0$ und A(0,5)<A(3) und A(3,5)<A(3)

f) Eine quadratische Funktion p hat dieselben Nullstellen wie f. Die Graphen von p und f schließen im 4.Quadranten zwei gleich große Flächenstücke ein.
Ermitteln Sie eine Gleichung von p.

1.2 (6 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen K_g einer Funktion g im Definitionsbereich $-4 \le x \le 4$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.



(1) Die zugehörige Ableitungsfunktion g' hat genau 5 Nullstellen.

(2) Es gilt: $\int_0^4 g(x)dx > 0$

(3) Jede Stammfunktion von g ist für $0 \le x \le 4$ monoton wachsend.

1.3 (a) 3 BE b) 1 BE c) 4 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit $k(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-t}$ $(t \geq 0)$ beschreibt die Konzentration eines Medikaments im Blut.
Hierbei ist t die Zeit seit der Einnahme (t = 0) in Stunden.
k(t) wird in Milligramm pro Liter $\left(\frac{mg}{l}\right)$ angegeben.

a) Zeichnen Sie den Graphen von k für $0 \leq t \leq 10$.

b) Geben Sie anhand der Zeichnung näherungsweise den Zeitpunkt an, zu welchem die Konzentration am stärksten abnimmt.

c) Es gilt $k'(7) < 0$ und $k''(7) > 0$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser beiden Aussagen hinsichtlich des Verlaufs des Graphen von k.
Interpretieren Sie diese beiden Aussagen im Sachzusammenhang.

Lösungen

1 Analysis

1.1

a) Der Punkt A(1|-1) liegt auf dem Schaubild von f.

Somit gilt f(1) = -1.

$f(1) = a \cdot 1 \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

b) Es gilt $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot (x-4) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$

Daraus folgt $f'(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$ und $f''(x) = 2x - \frac{8}{3}$

Hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

$x^2 - \frac{8}{3}x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x - \frac{8}{3}\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): x = 0

Gleichung II): $x - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

Wegen $f''(\frac{8}{3}) = \frac{8}{3} > 0$ existiert bei $x = \frac{8}{3}$ ein Tiefpunkt was man auch am Schaubild ablesen kann.

Es gilt $f(\frac{8}{3}) = -\frac{256}{81}$. Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $T(\frac{8}{3} \mid -\frac{256}{81})$

c) Hinreichende Bedingung für die Wendestelle: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Es gilt $f'''(x) = 2$

$2x - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Wegen $f'''(\frac{4}{3}) = 2 \neq 0$ existiert bei $x = \frac{4}{3}$ eine Wendestelle.

Steigung der Wendetangente: $f'(\frac{4}{3}) = -\frac{16}{9}$

Formel für den Steigungswinkel α (mit der x-Achse): $m = \tan(\alpha)$

$\tan(\alpha) = -\frac{16}{9} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(-\frac{16}{9}) \approx -61°$ (TR auf Gradmaß einstellen!)

Die Wendetangente schneidet die x-Achse unter einem Schnittwinkel von 61° bzw. unter einem Winkel von 180° - 61° = 119° (Steigungswinkel).

Hinweis: Da in der Aufgabe nur der Begriff „Winkel“ steht ist aus Sicht des Autors die Aufgabenstellung nicht eindeutig formuliert.

d) $s(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{9}x$

Es gilt $s'(x) = x^2 - \frac{16}{9}$ und $s''(x) = 2x$.

Zur Ermittlung der Krümmung benötigt man das Ergebnis von $f''(1)$.

Da das Schaubild von s aus dem Schaubild von f durch eine Verschiebung um $\frac{4}{3}$ nach links und eine Verschiebung in y-Richtung ergibt, folgt daraus:

$$f''(1) = s''(1 - \frac{4}{3}) = s''(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} < 0$$

Damit ist das Schaubild von f an der Stelle x = 1 rechtsgekrümmt.

Hinweis:
Die Verschiebung in y-Richtung ändert die Krümmungseigenschaft nicht.

e) Der Wert u = 3 ist derjenige x-Wert, für den der Flächeninhalt des beschriebenen Dreiecks maximal wird. Es handelt sich um ein globales Maximum.

f) Die Parabel hat die Nullstellen x = 0 und x = 4.
Ansatz für die Parabelgleichung: $p(x) = k \cdot x \cdot (x-4)$

Bedingung: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 p(x)dx$

Daraus folgt als Bedingung: $\int_0^4 (f(x) - p(x))dx = 0$

$$\int_0^4 (\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - (kx^2 - 4kx))dx = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{3}kx^3 + 2kx^2\right]_0^4$$
$$= -\frac{64}{9} - \frac{64}{3}k + 32k = -\frac{64}{9} + \frac{32}{3}k$$

$$-\frac{64}{9} + \frac{32}{3}k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

Gleichung der Parabel: $p(x) = \frac{2}{3} \cdot x \cdot (x-4)$

1.2

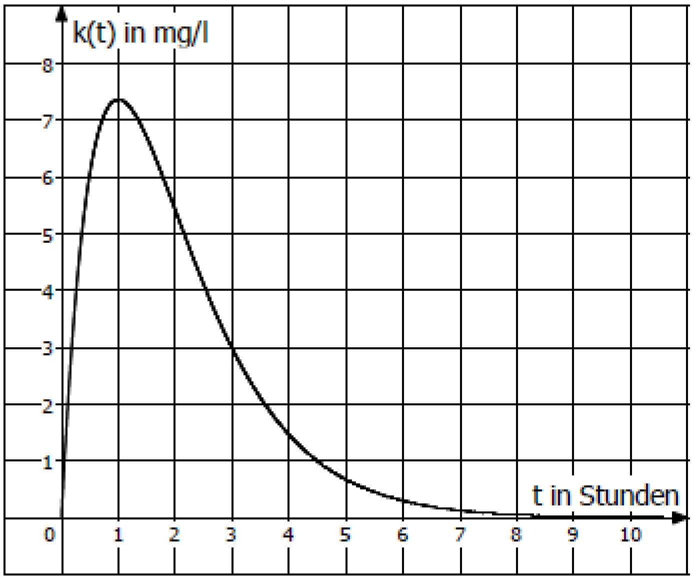
(1) Die Aussage ist wahr. Das Schaubild von g besitzt 5 Stellen mit waagrechter Tangente.

(2) Die Aussage ist wahr. Zwischen x = 0 und x = 3 ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von g und der x-Achse oberhalb der x-Achse größer als die Fläche zwischen x = 3 und x = 4 unterhalb de x-Achse.
Aufgrund der positiven Flächenbilanz ist das Integral positiv.

(3) Die Aussage ist falsch. Jede Stammfunktion G(x) von g(x) ist monoton wachsend, wenn $G'(x) = g(x) \geq 0$ ist.
Da das Schaubild von g jedoch auch unterhalb der x-Achse verläuft (zum Beispiel für x = 3,5) ist $I_0(x)$ bei x = 3,5 nicht monoton wachsend.

1.3

a) Zeichnung (mit Hilfe der Wertetabelle des TR)



b) Die Konzentration nimmt am stärksten an der Wendestelle ab.
Laut Zeichnung ist dies nach ca. t = 2 Stunden der Fall.

c) $k'(7) < 0$: Bei t = 7 ist die Steigung des Graphen von k negativ.
$k''(7) > 0$: Bei t = 7 ist der Graph von k linksgekrümmt.

Interpretation:
$k'(7) < 0$: 7 Stunden nach der Einnahme nimmt die Konzentration des Medikaments im Blut ab.

$k''(7) > 0$: Die Abnahmegeschwindigkeit der Konzentration sinkt.