

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Analysis

1.1 Eine Polynomfunktion p ist gegeben durch $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ ist.

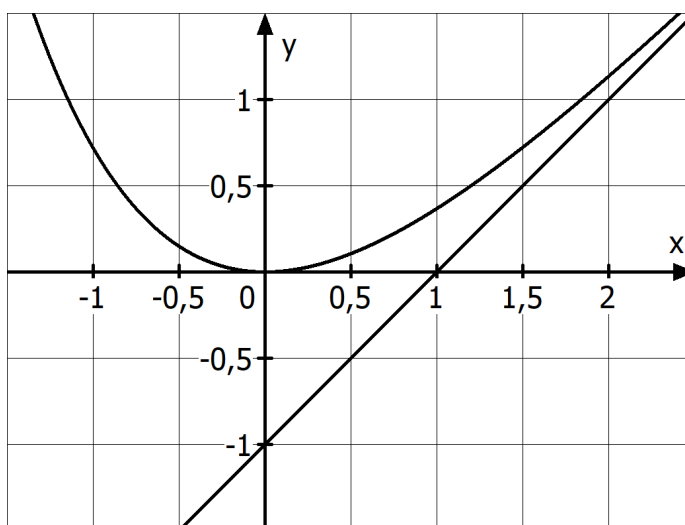
1.1.1 Bestimmen Sie die Werte von a und b , sodass die Punkte $P(-1|1)$ und $Q(1|0)$ auf dem Schaubild von p liegen.

(3 Punkte)

1.1.2 Nun gilt: $b = -a$. Untersuchen Sie, ob es eine negative Nullstelle von p gibt.

(2 Punkte)

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - 1 + e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild K von f , sowie dessen Asymptote g mit der Gleichung $y = x - 1$.



1.2.1 Geben Sie den Punkt auf g an, der den kleinsten Abstand zum Tiefpunkt $T(0|f(0))$ von K hat, und ermitteln Sie dessen Abstand.

(2 Punkte)

1.2.2 Das Schaubild H einer Funktion h entsteht durch Verschiebung von K . Der Tiefpunkt von H liegt bei $(1|-1)$. Berechnen Sie einen Funktionsterm von h .

(2 Punkte)

1.2.3 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(1) K besitzt keinen Wendepunkt.

(2) Im Intervall $[1,841; 1,842]$ liegt ein x_0 , sodass $f(x_0) = 1$ gilt.

(3) Es gibt keine Normale an K , die g senkrecht schneidet.

(7 Punkte)

1.2.4 Das Schaubild K , die beiden Geraden mit der Gleichung $x = -c$ und $x = c$ mit $c > 0$, und die Gerade g umschließen eine Fläche.

Bestimmen Sie c , sodass der Inhalt dieser Fläche den Wert 2 hat.

(4 Punkte)

Lösungen**1.1.1 Bestimmen Sie die Werte von a und b .**

Anhand der Punkte P und Q können folgende Bedingungen aufgestellt werden:

$$p(-1) = 1 \Rightarrow -a + b = 1 \quad (*)$$

$$p(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (**)$$

Addition $(*) + (**)$ ergibt $2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Einsetzen in $(**)$ ergibt $a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

1.1.2 Untersuchen Sie, ob es eine negative Nullstelle von p gibt.

Mit $b = -a$ lautet die Funktion $p(x) = ax^3 - ax^2$.

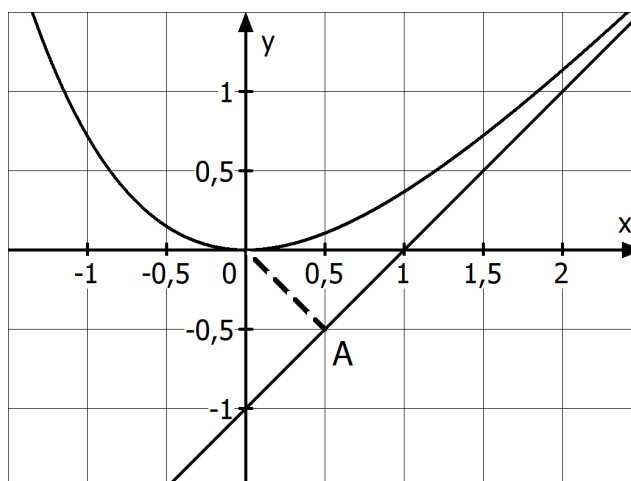
Bedingung für Nullstellen: $p(x) = 0$

$$ax^3 - ax^2 = 0 \Rightarrow ax^2 \cdot (x - 1) = 0 \quad \text{Lösung der Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Gleichung II): $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Daher gibt es keine negative Nullstelle von p .

1.2.1 Geben Sie den Punkt auf g an, der den kleinsten Abstand zum Tiefpunkt $T(0|f(0))$ von K hat, und ermitteln Sie dessen Abstand.

Zur Ermittlung des Punktes wird vom Punkt $T(0|0)$ ein Lot auf die Gerade g gefällt. Anhand der Zeichnung kann man ablesen, dass der Punkt auf g der Punkt $A(0,5|-0,5)$ ist.

Abstand von A zu T mit dem Satz des Pythagoras: $\overline{AT} = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,5}$

1.2.2 Berechnen Sie einen Funktionsterm von h .

Das Schaubild von h ergibt sich aus dem Schaubild von f durch eine Verschiebung um eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach unten.

$$h(x) = f(x-1) - 1 = (x-1) - 1 + e^{-(x-1)} - 1 = x - 3 + e^{-x+1}$$

1.2.3 (1) K besitzt keinen Wendepunkt.

Notwendige Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$\text{Es gilt } f'(x) = 1 - e^{-x} \text{ und } f''(x) = e^{-x}$$

$$\text{Bedingung: } e^{-x} = 0$$

Die Gleichung ist nicht lösbar, daher ist die notwendige Bedingung nicht erfüllt.
Somit kann K keine Wendepunkte haben.

(2) Im Intervall $[1,841 ; 1,842]$ liegt ein x_0 , sodass $f(x_0) = 1$ gilt.

Für den linken x -Wert im Intervall ergibt sich als y -Wert $f(1,841) \approx 0,99966$.

Für den rechten x -Wert im Intervall ergibt sich als y -Wert $f(1,842) \approx 1,0005$.

Da das Schaubild von f nicht unterbrochen ist, muss es einen x -Wert x_0 in diesem Intervall geben, bei dem $f(x_0) = 1$ ist.

(3) Es gibt keine Normale an K , die g senkrecht schneidet.

Die Gerade g hat die Steigung $m = 1$.

Eine Gerade, die g senkrecht schneidet, hat die Steigung $m = -1$.

Es ist also zu zeigen, dass eine Normale an K nicht die Steigung $m = -1$ haben kann.

Wenn die Steigung einer Normalen $m = -1$ ist, ist die Steigung der zugehörigen Tangente $m = 1$.

Zu lösen ist daher die Gleichung $f'(x) = 1$.

$$1 - e^{-x} = 1 \Rightarrow e^{-x} = 0 \text{ Gleichung ist nicht lösbar.}$$

Damit ist gezeigt, dass solch eine Normale nicht existiert.

1.2.4 Bestimmen Sie c , sodass der Inhalt dieser Fläche den Wert 2 hat.

$$\int_{-c}^c (f(x) - (x-1)) dx = \int_{-c}^c (x-1 + e^{-x} - x + 1) dx = \int_{-c}^c e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_{-c}^c = -e^{-c} + e^c$$

$$\begin{aligned} \text{Bedingung: } -e^{-c} + e^c &= 2 \quad | \cdot e^c \\ \Rightarrow -1 + e^{2c} &= 2e^c \Rightarrow e^{2c} - 2e^c - 1 = 0 \end{aligned}$$

Lösung der Gleichung mit Substitution: $u = e^c$

$$\begin{aligned} u^2 - 2u - 1 &= 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\ u_1 &\approx 2,414 \quad \text{und} \quad u_2 \approx -0,414 \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$e^c = 2,414 \Rightarrow c \approx 0,881$$

$$e^c = -0,414 \quad \text{Gleichung ist nicht lösbar.}$$

Der gesuchte Wert von c ist $c = 0,881$.