

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

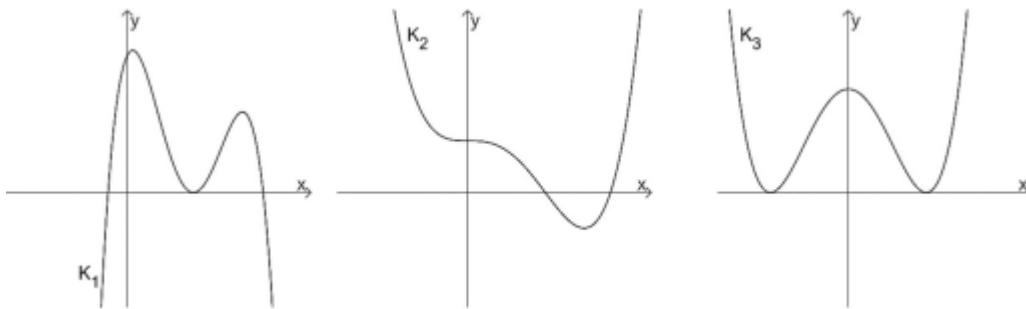
1 Analysis

1.1 (a) 6 BE b) 5 BE c) 1 BE d) 6 BE e) 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$.

Ihr Graph ist K .

- a) Einer der drei Graphen entspricht K .
Beurteilen Sie für jeden Graph, ob es sich um K handeln kann.



- b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte, in denen K eine waagrechte Tangente hat.
Geben Sie für jeden dieser Punkte an, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt.

- c) Weisen Sie nach, dass f bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

Neben dem Wendepunkt $W(2|0)$ besitzt K einen weiteren Wendepunkt $S(0|f(0))$.

Der Punkt $P(1|\frac{4}{3})$ liegt oberhalb des Graphen von f .

- d) Weisen Sie nach, dass sich die beiden Wendetangenten im Punkt P schneiden.

- e) Das Dreieck PSW wird von K in zwei Teile geteilt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilfläche oberhalb von K .

1.2 (a) 2 BE b) 6 BE c) 2 BE d) 3 BE)

Die CO_2 -Konzentration in der Atmosphäre wird seit 1958 durchgehend gemessen. Dabei sind die jährlichen Werte der Jahre 2012 bis 2022 in folgender Tabelle eingetragen. Die CO_2 -Konzentration wird in Millionstel (ppm, „parts per million“) angegeben.

Jahr	CO_2 (ppm)
2012	394,06
2013	396,74
2014	398,81
2015	401,01
2016	404,41
2017	406,76
2018	408,72
2019	411,65
2020	414,21
2021	416,41
2022	418,53

Quelle:

Dr. Pieter Tans, NOAA/GML and Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography
URL: <https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/data.html>, heruntergeladen am 15.05.2023

- a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate der CO_2 -Konzentration im Zeitraum 2012 bis 2022.
- b) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell für den gegebenen Verlauf der CO_2 -Konzentration. Geben Sie dazu eine geeignete Funktionsgleichung an. Begründen Sie Ihre Auswahl.
- c) Berechnen Sie die CO_2 -Konzentration, die laut Ihrem Modell im Jahr 2100 zu erwarten ist.
- d) Deuten Sie im Sachzusammenhang, warum ein mathematisches Modell, das auf Messungen innerhalb der Jahre 2012 bis 2022 beruht, nicht grundsätzlich für eine Vorhersage der CO_2 -Konzentration im Jahr 2100 verwendet werden kann.

Lösungen**1 Analysis****1.1**

- a) K_1 verläuft vom 3. in den 4. Quadranten. Da der Koeffizient vor der höchsten x -Potenz im Funktionsterm positiv ist ($\frac{1}{12}x^4$), stimmt das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ von K_1 nicht mit dem von K überein.

K_3 ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Da der Funktionsterm von f sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x aufweist, stimmt das Symmetrieverhalten von K_3 nicht mit dem von K überein.

K_2 verläuft vom 2. in den 1. Quadranten. K_2 ist weder achsensymmetrisch zur y -Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Somit stimmen sowohl das globale Verhalten als auch das Symmetrieverhalten von K_2 mit dem von K überein.

- b) Es gilt $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$.

Daraus folgt $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ und $f''(x) = x^2 - 2x$.

Bedingung: $f'(x) = 0$

$\frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Gleichung II): $\frac{1}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Kontrolle für $x = 3$: $f''(3) = 3 > 0$ also liegt eine Minimalstelle bei $x = 3$ vor

Wegen $f(3) = -\frac{11}{12}$ existiert der Tiefpunkt $T(3 | -\frac{11}{12})$

Kontrolle für $x = 0$: $f''(0) = 0$ damit ist keine Aussage möglich

Kontrolle, ob ein VZW bei f' vorliegt: $f'(-1) = -\frac{4}{3} < 0$ und $f'(1) = -\frac{2}{3} < 0$

Da kein VZW vorliegt, liegt bei $x = 0$ eine Sattelstelle vor.

Wegen $f(0) = \frac{4}{3}$ existiert der Sattelpunkt $S(0 | \frac{4}{3})$.

Hinweis: Die Art der Punkte (Tiefpunkt bei $x = 3$ und Sattelpunkt bei $x = 0$) hätte man auch aus dem Schaubild K_2 ablesen können.

c) Da die Nullstelle $x = 2$ bereits vorgegeben ist, kann diese direkt überprüft werden:

$$f(2) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 0 \text{ was zu zeigen war}$$

d) Gleichung der Wendetangente an der Stelle $x = 0$:

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

Mit $f'(0) = 0$ und $f(0) = \frac{4}{3}$ folgt für die Tangentengleichung:

$$y = 0 \cdot (x - 0) + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t_0(x) = \frac{4}{3}$$

Mit $f'(2) = -\frac{4}{3}$ und $f(2) = 0$ folgt für die Tangentengleichung:

$$y = -\frac{4}{3} \cdot (x - 2) + 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow t_2(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$

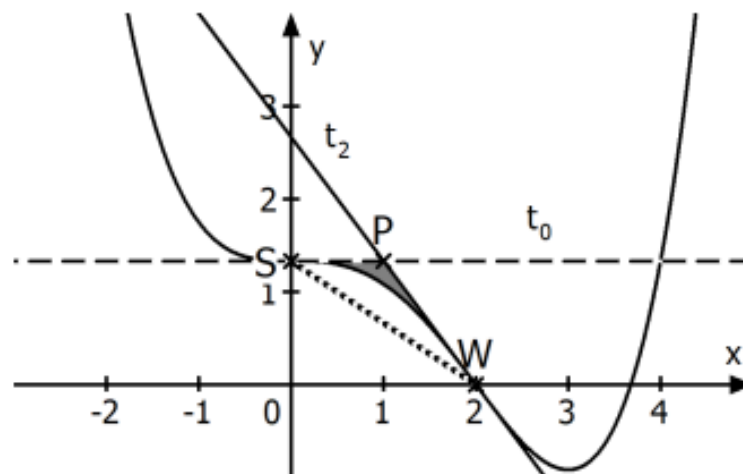
Kontrolle, ob der Punkt $P(1 | \frac{4}{3})$ auf den beiden Tangenten liegt:

Es gilt $t_0(1) = \frac{4}{3}$ und $t_2(1) = \frac{4}{3}$.

Damit ist $P(1 | \frac{4}{3})$ der Schnittpunkt der Wendetangenten.

e)

Skizze:



Gesucht ist der Inhalt der grau markierten Fläche:

Das Viereck OWPS ist ein Trapez.

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\overline{OW} + \overline{PS}}{2} \cdot \overline{OS} = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$$

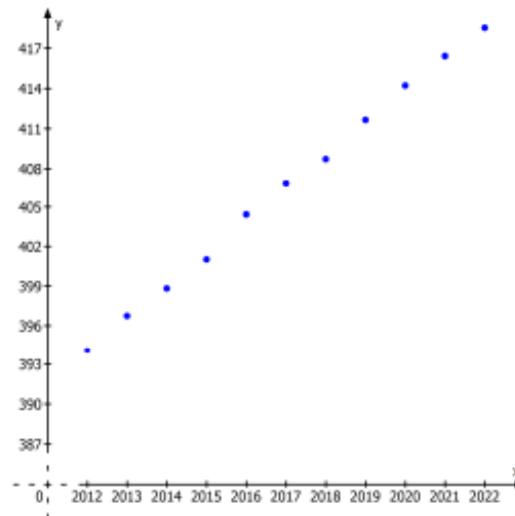
$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3} \right) dx = \left[\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{4}{3}x \right]_0^2 = \frac{28}{15}$$

$$\text{Flächeninhalt der grau markierten Fläche: } A_{\text{grau}} = 2 - \frac{28}{15} = \frac{2}{15}$$

1.2

a) Durchschnittliche Änderungsrate: $\frac{418,53 - 394,06}{2022 - 2012} = 2,45 \text{ ppm pro Jahr}$

b) Skizze der Punkte:



Die Punkte liegen näherungsweise auf einer Geraden.

Dies kann man auch daran erkennen, dass der Abstand zwischen den einzelnen Jahren ähnlich groß sind (maximal 2,93 und minimal 1,96)

Ansatz für die Geradengleichung: $y = mx + c$

Als Steigung kann die durchschnittliche Änderungsrate 2,45 aus a) benutzt werden.

Einsetzen des Punktes $P(2012|394,06)$ in die Gerade:

$$394,06 = 2,45 \cdot 2012 + c \Leftrightarrow c = -4535,34$$

Funktionsgleichung: $k(x) = 2,45x - 4535,34$

c) Einsetzen von $x = 2100$: $k(2100) = 609,66$

Laut Modell ist im Jahr 2100 mit einer CO_2 -Konzentration von ca. 610 ppm zu rechnen.

d) Es ist nicht gesichert, dass sich die CO_2 -Konzentration bis zum Jahr 2100 genauso wie im Zeitraum 2012 bis 2022 weiterentwickelt. Beispielsweise könnten Klimaschutzmaßnahmen diese Entwicklung beeinflussen.