Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
Grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

Baden-Württemberg

Teil A – Wahlaufgaben (A4-A5) / Problemlöseaufgabe (A6)

Hilfsmittel:
A4-A5: keine
A5: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

4/1 Analysis (3 BE und 2 BE)

Gegeben ist eine im Intervall [-4;4] definierte Polynomfunktion f vom Grad 3.
Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung und schneidet die x-Achse im Punkt N(4|0).
Der Wertebereich von f ist $W_f = [-2;2]$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f, wenn bekannt ist, dass $f'(0) < 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung einer trigonometrischen Funktion g, sodass f und g im Intervall [-4;4] dieselben Nullstellen haben.

4/2 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

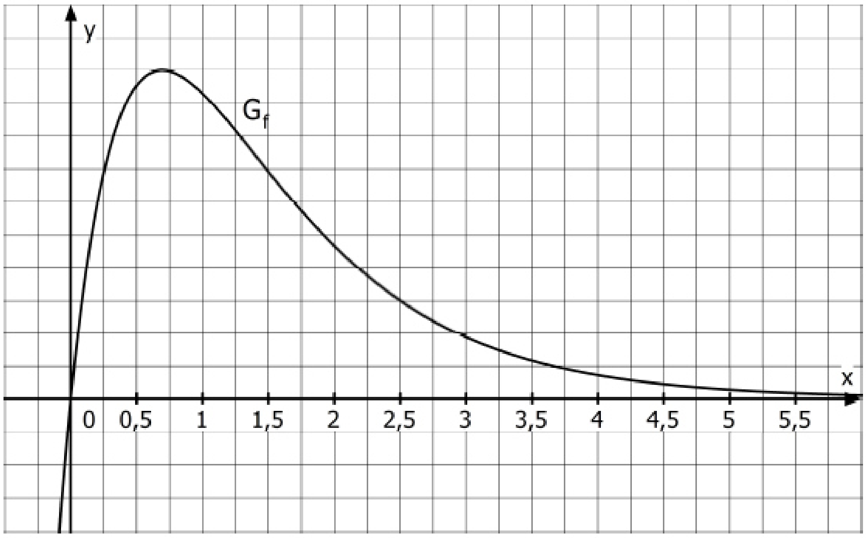
Der Punkt A(-1|2|4) wird an der x_2x_3-Ebene gespiegelt.
Der gespiegelte Punkt wird mit A‘ bezeichnet.

a) Zeichnen Sie A und A‘ in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

b) P ist ein beliebiger Punkt auf der x_2-Achse.
Begründen Sie, dass P genauso weit von A wie von A‘ entfernt ist.

5/1 Analysis (2 BE und 3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \to e^{-x} - e^{-2x}$.
G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = 0$ und hat einen Hochpunkt an der Stelle x_H.



a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass x_1 die einzige Nullstelle von f ist.

b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Abbildung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f''(0{,}5) > 0$

(2) $\int_0^2 f(x)dx < 2 \cdot f(x_H)$

5/2 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Gegeben ist die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

und der Punkt A(2|0|4) auf dieser Geraden.
Der Punkt Q(-2|-4|6) liegt nicht auf der Geraden.

a) Weisen Sie nach, dass $\left|\overrightarrow{QA}\right|$ dem Abstand von Q zur Geraden g entspricht.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes B auf g, der zusammen mit A und Q ein gleichschenkliges Dreieck bildet.

6 Stochastik (Problemlöseaufgabe) (10 BE)

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentieren und reflektieren Sie Ihre Vorgehensweise.

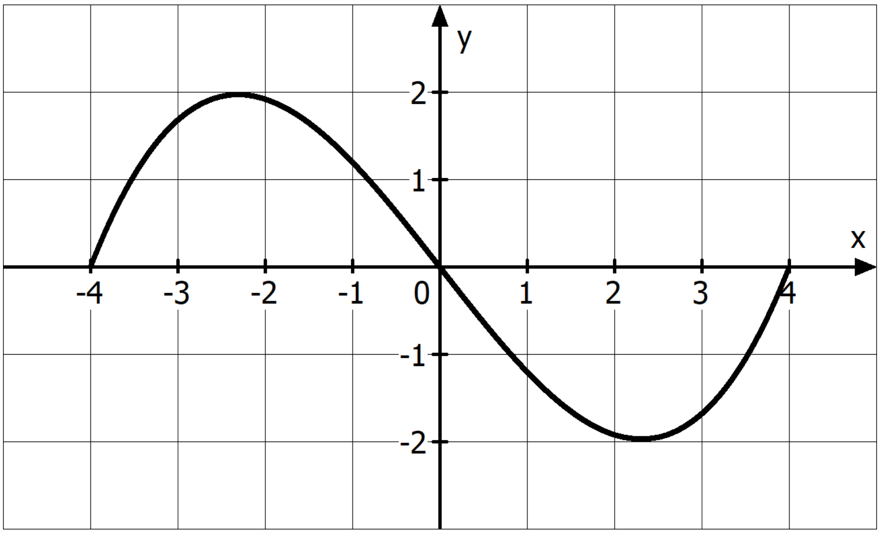
Eine Klasse will ein Glücksspiel in Form eines Zufallsexperiments anbieten, bei dem sie im langfristigen Mittel 1 € Gewinn pro Spiel macht.

Entwerfen und beschreiben Sie ein dazu passendes mehrstufiges Zufallsexperiment.

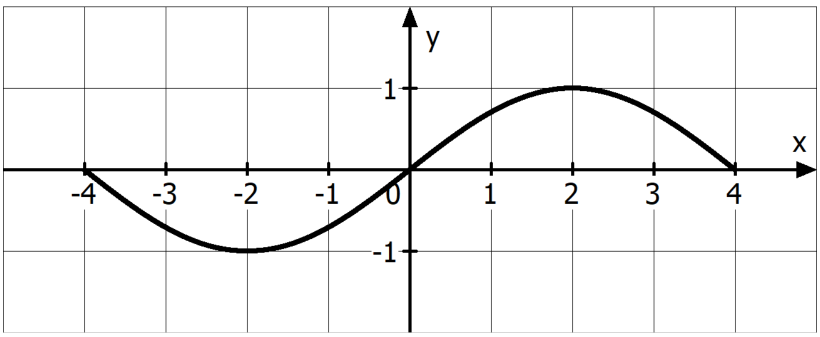
Lösungen

4/1 Analysis

a) Skizze einer möglichen Funktion:



b) Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion, die diese Eigenschaft erfüllt, könnte so aussehen:



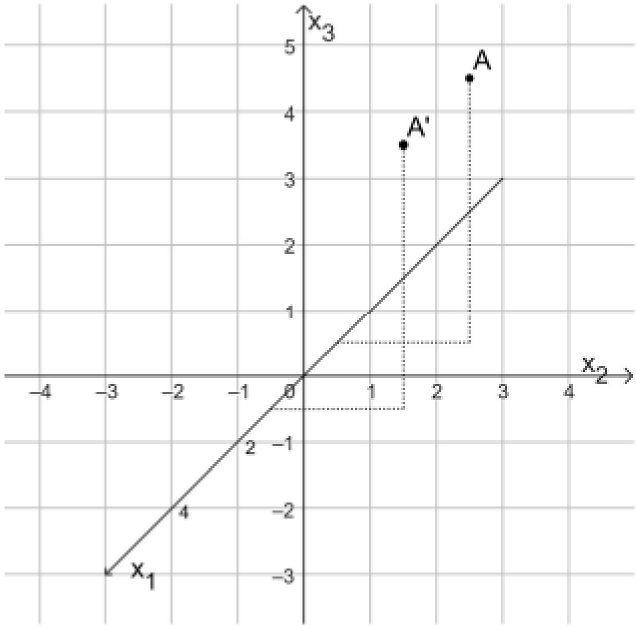
Es handelt sich um eine Sinusfunktion mit der Periode p = 8.

Funktionsansatz: $g(x) = \sin(bx)$ mit $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Eine mögliche Funktionsgleichung lautet $g(x) = \sin(\frac{\pi}{4} \cdot x)$

4/2 Lineare Algebra

a) Der Punkt A‘ hat die Koordinaten A‘(1|2|4).
Hinweis: Das Vorzeichen der x_1-Koordinate dreht sich gegenüber dem Punkt A.



b) Die Punkte A und A‘ liegen spiegelbildlich zur x_2x_3-Ebene. Daher ist der Abstand für jeden Punkt auf dieser Ebene A und A‘ gleich.
Da der Punkt P auf der x_2-Achse liegt und somit auch in der x_2x_3-Ebene, gilt:
$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{A'P}\right|$

5/1 Analysis

a) Nullstelle von f: $f(x) = 0$

$e^{-x} - e^{-2x} = 0$
$\Leftrightarrow e^{-x}(1 - e^{-x}) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$

Damit ist $x_1 = 0$ die einzige Nullstelle von f.

b)
(1) Der Graph von f ist an der Stelle x = 0,5 rechtsgekrümmt, daher ist $f''(0{,}5) < 0$.
Die Aussage ist falsch.

(2) Die Fläche $A_1 = \int_0^2 f(x)dx$ beschreibt den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse im Intervall [0;2].

Die Fläche $A_2 = 2 \cdot f(x_H)$ beschreibt den Inhalt der Rechtecksfläche mit der Breite 2 und der Höhe $f(x_H)$ (also dem y-Wert des Hochpunktes).

Mit Hilfe der Abbildung erkennt man, dass $A_2 > A_1$ ist. Die Aussage ist wahr.

5/2 Lineare Algebra

a) Es gilt $\overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{QA}$ ist dann der Abstand von Q zur Geraden g, wenn der Vektor $\overrightarrow{QA}$ senkrecht auf der Geraden steht.

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$ was zu zeigen war

b) Da das Dreieck QAB im Punkt A rechtwinklig ist, können bei einem gleichschenkligen Dreieck nur die Strecken QA und AB gleich lang sein.

Bedingung: $\left|\overrightarrow{QA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\left|\overrightarrow{QA}\right| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$ LE (Längeneinheiten)

Der Punkt B liegt auf der Geraden g und muss vom Punkt A 6 LE entfernt sein.

Um den Punkt B zu berechnen, benötigt man den Einheitsvektor des Richtungsvektors von g.

Richtungsvektor von g: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wegen $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ ist der zugehörige Einheitsvektor $\overrightarrow{u_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.Möglichkeit: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 6 \cdot \overrightarrow{u_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ also B(6|-2|8)

2.Möglichkeit: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - 6 \cdot \overrightarrow{u_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ also B(-2|2|0)

6 Stochastik

Analyse:

Was wären mögliche zweistufige Zufallsexperimente?

- Zweimaliges Drehen eines Glücksrades
- Zweimaliges Würfeln mit einem Würfel
- Zweimaliges Werfen einer Münze
- Zweimaliges Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit/ohne Zurücklegen

Wie ist ein Zufallsexperiment zu gestalten, damit ein durchschnittlicher Gewinn von 1€ erzielt wird?

Durchführung:

Ein durchschnittlicher Gewinn von 1 € wird erzielt, wenn der Einsatz um 1 € höher ist als die erwartete Auszahlung an den Spieler.

Mögliches Gewinnspiel:

Ein Glücksrad besteht aus zwei Feldern:
Feld „Rot“ mit einem Mittelpunktswinkel von 180°
Feld „Grün“ mit einem Mittelpunktswinkel von 180°

Somit gilt für eine einzelne Drehung: P(rot) = P(grün) = 0,5

Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Wenn zweimal das Feld „Rot“ gedreht wird, werden dem Spieler 4€ ausbezahlt.
Ansonsten erhält der Spieler keine Auszahlung.
Die Zufallsgröße X stellt die Auszahlung an den Spieler dar.

Es gilt: $P(X=4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ und $P(X=0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Erwartungswert von X: $E(X)=4\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{4}=1$ €
Die erwartete Auszahlung an den Spieler ist 1€.

Somit muss der Spieleinsatz 2 € sein, damit der erwartete Gewinn 1€ beträgt.