

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra (a) 4 BE b) 3 BE c) 3 BE d) 5 BE e) 3 BE f) 7 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(0|3|0)$ und $C(2|-1|4)$ sowie die Gerade h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}.$$

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und C .

- a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h in einer gemeinsamen Ebene E liegen.
- b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der in Teilaufgabe a) beschriebenen Ebene E .
(zur Kontrolle: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$)
- c) Berechnen Sie die Koordinaten der Spurpunkte von E .
Stellen Sie die Ebene E mit Hilfe der Spurpunkte in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

Die Punkte A und C sind gegenüberliegende Eckpunkte eines in der Ebene E liegenden Quadrats $ABCD$ mit Mittelpunkt M .

Dieses Quadrats $ABCD$ ist die Grundfläche einer sogenannten geraden Pyramide, d.h. der Verbindungsvektor von M und der Spitze der Pyramide ist orthogonal zur Grundfläche.

- d) Zeigen Sie, dass ein weiterer Eckpunkt des Quadrats die Koordinaten $(-1|2|4)$ hat.
Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes.
- e) Bestimmen Sie die Koordinaten einer möglichen Spitze der Pyramide, sodass diese die Höhe 12 hat.

Eine weitere gerade Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ hat die Spitze R und wird aus der x_3 -Richtung beleuchtet. Es entsteht ein Schatten in der Ebene E .

Der Schattenpunkt der Spitze R ist $R'(3|3|-6)$.

- f) Begründen Sie, dass der Schattenpunkt R' außerhalb der Grundfläche der Pyramide liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze R .

Lösungen**3 Lineare Algebra**

a) Gleichung der Gerade durch A und C: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

g und h liegen in einer gemeinsamen Ebene, wenn sie nicht windschief zueinander sind.

Da die Richtungsvektoren von g und h keine Vielfachen zueinander sind, sind die Geraden nicht parallel.

Das heißt g und h schneiden sich oder sie sind zueinander windschief.

Gleichsetzen der Geradengleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 5 + 3r & = & s \\ -3 - 4r & = & 3 - 2s \\ 2 + 2r & = & 2s \end{array}$$

Addition der Zeilen 2 und 3: $-1 - 2r = 3 \Leftrightarrow r = -2$

Einsetzen von $r = -2$ in Zeile 3: $2 - 4 = 2s \Leftrightarrow s = -1$

Einsetzen in Zeile 1: $5 - 6 = -1$ ist eine wahre Aussage
Daraus folgt, dass die Geraden g und h sich schneiden.
Damit liegen g und h in einer Ebene.

b) Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

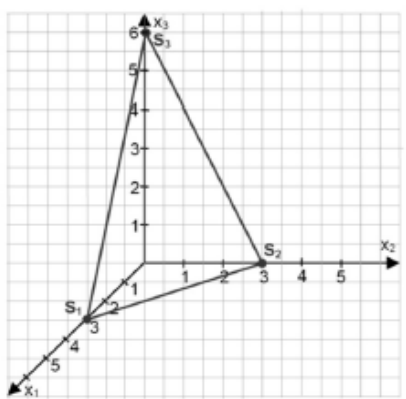
Ansatz für die Koordinatengleichung: E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$

Einsetzen von Punkt A(0|3|0) ergibt $d = 6$.

Koordinatengleichung: E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

c) Spurpunkte von E:

$$S_1(x_1 | 0 | 0) \Rightarrow S_1(3 | 0 | 0) \quad S_2(0 | x_2 | 0) \Rightarrow S_2(0 | 3 | 0) \quad S_3(0 | 0 | x_3) \Rightarrow S_3(0 | 0 | 6)$$



d) Der angegebene Eckpunkt sei $B(-1|2|4)$.

Kontrolle, ob B in der Ebene E liegt: $2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 4 = 6$ ist eine wahre Aussage

Damit die Punkte ABCD ein Quadrat ergeben, muss das Dreieck ABC im Punkt B einen rechten Winkel haben und es muss gleichschenkelig sein.

$$\text{Prüfung Rechtwinkligkeit: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 - 3 + 0 = 0 \text{ was zu zeigen war}$$

$$\text{Prüfung Gleichschenkligkeit: } |\overrightarrow{BA}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} \text{ was zu zeigen war}$$

$$\text{Berechnung des vierten Eckpunktes D: } \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt D hat die Koordinaten $D(3|0|0)$.

e) Die Spitze S der Pyramide ist genau senkrecht über dem Mittelpunkt M des Quadrats (also der Mittelpunkt der Strecke AC)

$$\text{Koordinaten von M: } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also } M(1|1|2)$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normaleneinheitsvektor: } \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Für die Koordinaten von S gilt: } \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} \pm 12 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gibt zwei mögliche Pyramidenspitzen:

$S_1(9|9|6)$ und $S_2(-7|-7|-2)$

- f) Die x_3 -Koordinate von R' ist negativ, während alle x_3 -Koordinaten der Punkte A,B,C,D größer oder gleich 0 sind.
Deshalb muss R außerhalb der Grundfläche ABCD liegen.

Berechnung des Punktes R:

Aufstellen der Gerade, die durch R' und in x_3 -Richtung verläuft:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufstellen der Gerade, die durch M und senkrecht zu E verläuft:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Punkt R ist der Schnittpunkt von g und h:

$$\begin{array}{rcl} 3 & = & 1 + 2t \\ 3 & = & 1 + 2t \\ -6 + s & = & 2 + t \end{array}$$

Aus Zeile 1 und 2 folgt: $t = 1$

Aus Zeile 3 folgt $s = 9$.

Einsetzen von $t = 1$ in h ergibt $R(3|3|3)$.