

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

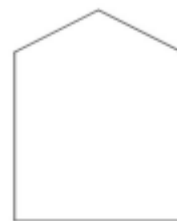
berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra (a) 4 BE b) 4 BE c) 3 BE d) 5 BE e) 2 BE f) 4 BE g) 3 BE)

In einem Garten steht ein vollständig verglastes Gewächshaus.
Die rechteckige Grundfläche ABCD in der x_1x_2 -Ebene ist 5 Meter (m) lang und 2 m breit. In einer Höhe von 2 m beginnt die Dachschräge, das gesamte Gewächshaus ist 2,5 m hoch. In der Skizze rechts ist die symmetrische Frontansicht des Gewächshauses dargestellt.



- Zeichnen Sie das Gewächshaus in ein dreidimensionales Koordinatensystem, wenn die Eckpunkte $A(5|0|0)$, $B(5|2|0)$, $C(0|2|0)$, $F(5|2|2)$, $G(0|2|2)$, $I(5|1|2,5)$ und $J(0|1|2,5)$ bekannt sind.
- Berechnen Sie das Gewicht des für das Gewächshaus benötigten Glases, wenn ein Quadratmeter Glas 10 kg wiegt.
- Berechnen Sie den Neigungswinkel für eine der schrägen Dachkanten.

An der Seite des Gewächshauses soll ein dreieckiges, ebenes Sonnensegel angebracht werden. Die Eckpunkte des Sonnensegels sollen sich in den Punkten F und G des Gewächshauses und der Spitze $S(3|4|1,5)$ eines Pfostens befinden. Im Punkt $(3|3|0)$ steht der 1,8 m hohe, gerade Stumpf eines alten Kirschbaumes.

- Untersuchen Sie, ob der Stumpf gekürzt werden muss, damit das Segel wie geplant gespannt werden kann.
- Zeigen Sie, dass es sich bei dem Segel nicht um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.
- Bestimmen Sie einen Wert für k , so dass durch die Verschiebung der Pfostenspitze in den Punkt $P_k(3|k|1,5)$ ein gleichschenkliges Dreieck FGP_k entsteht.
- Zur Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den Punkten B und G ergibt sich folgender Ansatz:

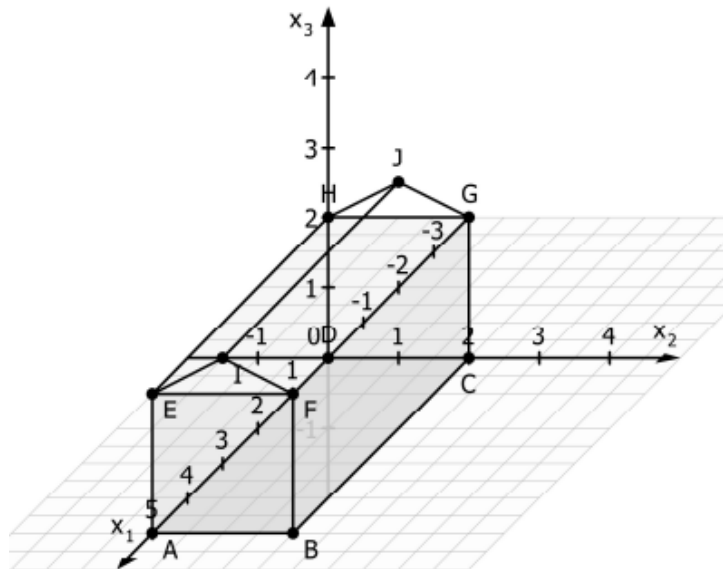
$$\begin{pmatrix} 5-t \\ 2-4 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-t \\ 2-4 \\ 2-3 \end{pmatrix}$$

Interpretieren Sie diesen Ansatz.

Lösungen

3 Lineare Algebra

a) Zeichnung:



b) Die in der Aufgabe fehlenden Punkte haben folgende Koordinaten:
 $D(0|0|0)$, $E(5|0|2)$ und $H(0|0|2)$

Die Glasflächen setzen sich aus folgenden Rechtecken und Dreiecken zusammen:

$$A_{BCGF} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$A_{ABFE} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$A_{EFI} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 = 0,5$$

Wegen $|\vec{FI}| = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \sqrt{1,25}$ gilt: $A_{FGJI} = 5 \cdot \sqrt{1,25} \approx 5,59$

$$\text{Glasflächen} = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 5,59 = 40,18 \text{ m}^2$$

$$\text{Gewicht des Glases} = 40,18 \cdot 10 = 401,8 \text{ kg}$$

c) Der gesuchte Neigungswinkel entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren

$$\vec{JG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ und dem Richtungsvektor der } x_2\text{-Achse } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1,25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1,25}} \approx 0,894 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,894) \approx 26,6^\circ$$

d) Gleichung der Ebene E, in der das Sonnensegel liegt:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OF} + r \cdot \overrightarrow{FG} + s \cdot \overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Punkt Q(3|3|z), in dem die Ebene E den Kirschbaumstumpf schneidet.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Aus der 2.Zeile folgt: $3 = 2 + 2s \Rightarrow s = 0,5$

Aus der 1.Zeile folgt: $3 = 5 - 5r - 2s \Rightarrow r = 0,2$

Aus der 3.Zeile folgt: $z = 2 - 0,5 \cdot 0,5 = 1,75$

Da $z = 1,75 < 1,8$ m ist, passt der Baumstumpf nicht unter das Sonnensegel und muss daher gekürzt werden.

e) Berechnung der Länge der Dreiecksseiten:

$$\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{FS}| = \sqrt{4 + 4 + 0,25} = \sqrt{8,25}$$

$$\overrightarrow{GS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{GS}| = \sqrt{9 + 4 + 0,25} = \sqrt{13,25}$$

$$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{FG}| = \sqrt{25} = 5$$

Da alle Seiten eine unterschiedliche Länge haben, ist das Dreieck nicht gleichschenkelig.

f) Berechnung der Länge der Dreiecksseiten:

$$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{FG}| = \sqrt{25} = 5$$

$$\overrightarrow{FP_k} = \begin{pmatrix} -2 \\ k-2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{FP_k}| = \sqrt{4 + (k-2)^2 + 0,25} = \sqrt{4,25 + (k-2)^2}$$

$$\overrightarrow{GP_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ k-2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{GP_k}| = \sqrt{9 + (k-2)^2 + 0,25} = \sqrt{9,25 + (k-2)^2}$$

1. Möglichkeit: Es gilt $|\overrightarrow{FP_k}| = |\overrightarrow{FG}|$

$$\sqrt{4,25 + (k-2)^2} = 5 \quad | \text{quadrieren}$$

$$4,25 + (k-2)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow (k-2)^2 = 20,75 \Leftrightarrow k-2 = \pm\sqrt{20,75}$$

$$\text{Daraus folgt } k_1 = \sqrt{20,75} + 2 \approx 6,56 \text{ oder } k_2 = -\sqrt{20,75} + 2 \approx -2,56$$

Der Wert von k kann nicht negativ sein, da sich die Pfostenspitze auf der Seite des Gewächshauses befinden muss, wo sich die Punkte F und G befinden.

Somit kommt nur k_1 als Lösung in Betracht.

2. Möglichkeit: Es gilt $|\overrightarrow{GP_k}| = |\overrightarrow{FG}|$

$$\sqrt{9,25 + (k-2)^2} = 5 \quad | \text{quadrieren}$$

$$9,25 + (k-2)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow (k-2)^2 = 15,75 \Leftrightarrow k-2 = \pm\sqrt{15,75}$$

$$\text{Daraus folgt } k_1 = \sqrt{15,75} + 2 \approx 5,97 \text{ oder } k_2 = -\sqrt{15,75} + 2 \approx -1,97$$

Der Wert von k kann nicht negativ sein, somit kommt nur k_1 als Lösung in Betracht.

3. Möglichkeit: Es gilt $|\overrightarrow{GP_k}| = |\overrightarrow{FP_k}|$

$$\sqrt{4,25 + (k-2)^2} = \sqrt{9,25 + (k-2)^2} \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Leftrightarrow 4,25 + (k-2)^2 = 9,25 + (k-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4,25 = 9,25 \quad \text{dies ist ein Widerspruch, somit liefert diese Möglichkeit keine Lösung}$$

g) Mit dem Ansatz kann die x_1 -Koordinate des Punktes T($t \mid 4 \mid 3$) berechnet werden, der von den beiden Punkten B und G denselben Abstand hat.