

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie, Matrizenrechnung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

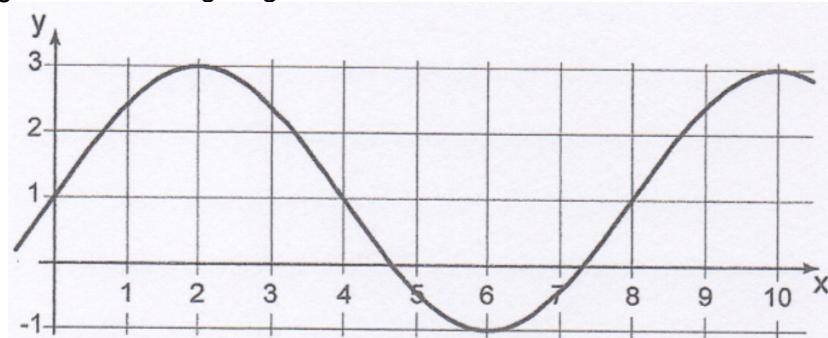
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2019

Analysis

1.1 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion f .



1.1.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) $f'(1) > 0$

(2) $\int_1^3 f(x) dx \geq 6$

(3) Für jede Stammfunktion F von f gilt: $F(4) = F(0)$.

(6 Punkte)

1.1.2 Ermitteln Sie einen Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion, die zu diesem Schaubild passt.

(3 Punkte)

1.2 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion g mit $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

(2 Punkte)

1.3 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^1 (\sqrt{2} \cdot x)^2 dx$.

(2 Punkte)

1.4 Im Folgenden ist e die Eulersche Zahl und h die Funktion mit $e^{h(x)} = x$ für $x > 0$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

(2 Punkte)

Stochastik

- 2 Laut Statistik fahren 70% aller Besucher eines Freizeitparks mit der extrem schnellen Super-Achterbahn. Von den Fahrern sind 10% über 50 Jahre alt.
Die Besucher, die nicht mit dieser Achterbahn fahren, sind zu 80% über 50 Jahre alt.
- 2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und tragen Sie die genannten Wahrscheinlichkeiten ein.
(3 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher des Freizeitparks über 50 Jahre alt ist.
(2 Punkte)
- 2.2.1 Geben Sie im Sachzusammenhang eine Fragestellung an, die mithilfe des Terms $0,7^{12} + 12 \cdot 0,3 \cdot 0,7^{11}$ beantwortet werden kann.
(2 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & & & & = & \frac{5}{3} \\ & & y & - & 2z & & = & 1 \\ & & y & + & z & & = & 2 \end{array}$$

(2 Punkte)

3.2 Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_1x_3 – Ebene ist.

Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Geraden g ist und von dieser den Abstand 5 Längeneinheiten hat.

(3 Punkte)

3.2.2 Berechnen Sie den Abstand, den der Punkt P(0/0/0) zu g hat. (3 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & & & = & \frac{5}{3} \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(2 Punkte)

3.2 Im Folgenden ist $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix und A eine Matrix mit $A \cdot A = E$.

3.2.1 Berechnen Sie die Werte für a und b, falls $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. (3 Punkte)

3.2.2 Lösen Sie die folgende Matrixgleichung nach der 2 x 2-Matrix X auf:

$$(A^2 - 2X)A = 2XA$$

(3 Punkte)

Lösungen**Analysis**1.1.1 (1) $f'(1) > 0$

Das Schaubild hat im Punkt $(1/f(1))$ eine positive Steigung und daher ist die erste Ableitung an der Stelle $x = 1$ positiv.

Die Aussage ist wahr.

$$(2) \int_1^3 f(x) dx \geq 6$$

Die Fläche, die das Schaubild von f im Intervall $[1;3]$ mit der x -Achse einschließt ist kleiner als 6.

Die Aussage ist falsch.

(3) Für jede Stammfunktion F von f gilt: $F(4) = F(0)$.

Die Aussage ist falsch.

Erste Begründungsmöglichkeit:

Das Schaubild der Ableitungsfunktion $f(x)$ verläuft im Intervall $[0;4]$ oberhalb der x -Achse. Folglich ist die Funktion $F(x)$ in diesem Intervall streng monoton wachsend. Also kann nicht $F(0) = F(4)$ gelten.

Zweite Begründungsmöglichkeit:

Es gilt $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0)$. Wenn $F(4) = F(0)$ gelten würde, wäre $F(4) - F(0) = 0$, aber das Ergebnis des Integrals ist nicht null.

1.1.2 *Ermitteln Sie einen Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion, die zu diesem Schaubild passt.*

Funktionsansatz: $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$

$$\text{Es gilt } d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \quad \text{und} \quad a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

Aus dem Schaubild kann abgelesen werden, dass die Periode $p = 8$ beträgt.

$$\text{Also gilt: } b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Da die Sinusfunktion nicht nach links/rechts verschoben wurde, gilt $c = 0$

$$\text{Die Funktion lautet } f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) + 1$$

- 1.2 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion g mit $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

Umschreiben der Funktionsgleichung: $g(x) = 3x^2 - x + x^{-1}$

Daraus folgt $g'(x) = 6x - 1 - x^{-2}$

- 1.3 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^1 (\sqrt{2} \cdot x)^2 dx$.

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{2} \cdot x)^2 dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{4}{3}$$

- 1.4 Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

Fasse die beiden Seiten der Gleichung $e^{h(x)} = x$ als Funktion auf, also $f(x) = e^{h(x)}$ und $g(x) = x$.

Aus $f(x) = g(x)$ folgt $f'(x) = g'(x)$

Es gilt $f'(x) = e^{h(x)} \cdot h'(x)$ und $g'(x) = 1$.

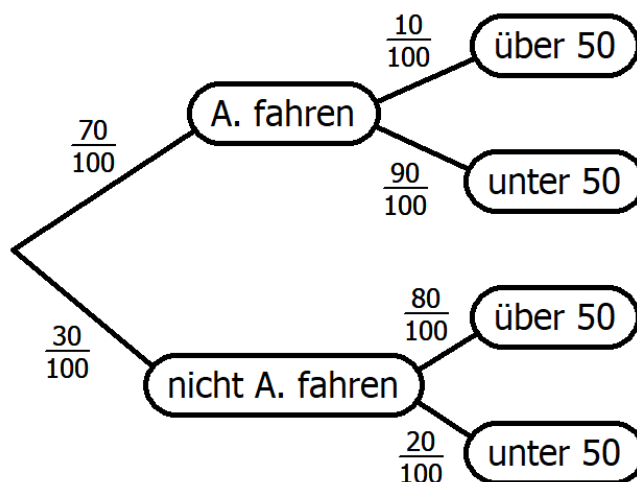
Also gilt $e^{h(x)} \cdot h'(x) = 1$.

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{e^{h(x)}}$$

Da $e^{h(x)} = x$ gilt, folgt also $h'(x) = \frac{1}{x}$.

Stochastik

- 2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und tragen Sie die genannten Wahrscheinlichkeiten ein.



- 2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher des Freizeitparks über 50 Jahre alt ist.

Die Wahrscheinlichkeit kann mit Hilfe der Pfadregeln berechnet werden:

$$P(\text{Besucher über 50 Jahre alt}) = \frac{70}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{31}{100}$$

- 2.2.1 Geben Sie im Sachzusammenhang eine Fragestellung an, die mithilfe des Terms $0,7^{12} + 12 \cdot 0,3 \cdot 0,7^{11}$ beantwortet werden kann.

Der Term $0,7^{12}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 12 Besuchern alle Achterbahn fahren.

$$\text{Der Term } 12 \cdot 0,3 \cdot 0,7^{11} = \binom{12}{11} \cdot 0,7^{11} \cdot 0,3^1 \text{ oder } 12 \cdot 0,3 \cdot 0,7^{11} = \binom{12}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^{11}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 12 Besuchern genau 11 Besucher Achterbahn fahren.

Insgesamt lautet die Fragestellung:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fahren von 12 Besuchern mindestens 11 Besucher mit der Achterbahn?

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 5/3 \\ y - 2z & = & 1 \quad | \cdot (-1) \\ y + z & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 5/3 \\ y - 2z & = & 1 \\ +3z & = & 1 \end{array}$$

Aus der 3. Zeile folgt: $z = \frac{1}{3}$

Aus der 2. Zeile folgt: $y - \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

Aus der 1. Zeile folgt: $x + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = 0$

Lösungsmenge $L = \{(0 | \frac{5}{3} | \frac{1}{3})\}$ bzw. Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

3.2.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_1x_3 – Ebene ist.

Die Gerade ist parallel zur x_1x_3 – Ebene, da die x_2 – Koordinate des Richtungsvektors den Wert 0 besitzt.

Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Geraden g ist und von dieser den Abstand 5 Längeneinheiten hat.

Da die gesuchte Gerade parallel zu g ist, wird der Richtungsvektor von g beibehalten. Nun benötigt man noch einen Punkt der gesuchten Geraden.

Da die Gerade g parallel zur x_1x_3 – Ebene ist, enthält die gesuchte Gerade den Punkt $P(5|6|1)$. Die Koordinaten von P ergeben sich aus dem Ortsvektor von g , wobei die x_2 – Koordinate um 5 vergrößert wurde.

Geradengleichung der gesuchten Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.2.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_1x_3 -Ebene ist.

Die Gerade ist parallel zur x_1x_3 -Ebene, da die Gerade keinen Spurpunkt mit der x_1x_3 -Ebene besitzt.

Rechnerische Kontrolle, dass der Spurpunkt $S_{13}(x_1 | 0 | x_3)$ nicht auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Aus der 2. Zeile folgt ein Widerspruch } 0 = 1.$$

Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Geraden g ist und von dieser den Abstand 5 Längeneinheiten hat.

3.2.2 Berechnen Sie den Abstand, den der Punkt $P(0/0/0)$ zu g hat.

Ein laufender Punkt auf g hat die Koordinaten $L(5 + 2r | 1 | 1 + 3r)$

$$\begin{aligned} \text{Bedingung: } \overrightarrow{OL} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 + 2r \\ 1 \\ 1 + 3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow 10 + 4r + 3 + 9r = 0 \Rightarrow 13r = -13 \Rightarrow r = -1 \end{aligned}$$

Koordinaten des Lotfußpunktes: $L(3 | 1 | -2)$.

$$\text{Gesuchter Abstand: } |\overrightarrow{OL}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rclcl} x + y & = & 5/3 & & \\ y - 2z & = & 1 & | \cdot (-1) & \longrightarrow \\ y + z & = & 2 & & \longleftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 5/3 \\ y - 2z & = & 1 \\ +3z & = & 1 \end{array}$$

Aus der 3. Zeile folgt: $z = \frac{1}{3}$

Aus der 2. Zeile folgt: $y - \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

Aus der 1. Zeile folgt: $x + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = 0$

Lösungsmenge $L = \{(0 | \frac{5}{3} | \frac{1}{3})\}$ bzw. Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

3.2.1 Berechnen Sie die Werte für a und b

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + 2b & 2a \\ ab & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $a = 0$ und $b = 0,5$.

3.2.2 Lösen Sie die folgende Matrixgleichung nach der 2×2 -Matrix X auf:

$$(A^2 - 2X)A = 2XA$$

Da gemäß Vorgabe $A \cdot A = E$ ist, ergibt sich die Gleichung:

$$(E - 2X)A = 2XA$$

$$\Rightarrow E \cdot A - 2XA = 2XA \quad \Rightarrow A = 4XA \quad | \cdot A^{-1} \text{ von rechts}$$

$$\Rightarrow E = 4X \Rightarrow X = \frac{1}{4}E = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$$