

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Stochastik Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

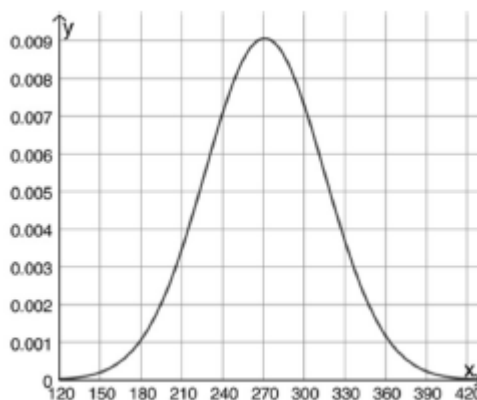
2 Stochastik (a) 2 BE b) 4 BE c) 6 BE d) 5 BE e) 4 BE f) 4 BE)

Bei einem Marathonlauf kommen erfahrungsgemäß 77% der Teilnehmer im Ziel an. Untersucht wird eine Gruppe von 150 zufällig ausgewählten Teilnehmern. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Teilnehmer dieser Gruppe, die im Ziel ankommen.

- a) Es gilt: $P(X > 115) \approx 50,7\%$.
Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.
- b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Aus dieser Gruppe kommen genau 110 Teilnehmer im Ziel an.
B: Aus dieser Gruppe kommen weniger als 119 Teilnehmer im Ziel an.
- c) Jeder der 45000 Teilnehmer, der im Ziel ankommt, erhält ein Finisher-Shirt. Y beschreibt die Anzahl an ausgegebenen Finisher-Shirts. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Y um weniger als eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

Von den Teilnehmern, die nicht im Ziel angekommen sind, haben

- 82% wegen „mangelnder Vorbereitung“
 - 72% entweder wegen „mangelnder Vorbereitung“ oder wegen „Schmerzen während des Laufs“
 - 13% weder wegen „mangelnder Vorbereitung“ noch wegen „Schmerzen während des Laufs“ den Lauf abgebrochen.
- d) Zeigen Sie, dass 20% derjenigen, die nicht im Ziel angekommen sind, den Lauf wegen „Schmerzen während des Laufs“ abgebrochen haben. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „mangelnde Vorbereitung“ und „Schmerzen während des Laufs“ stochastisch unabhängig sind.
- e) 34% der Teilnehmer, die den Lauf beenden, sind Frauen. Betrachtet wird eine Gruppe von 1000 Teilnehmern, die den Lauf beendet haben. Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl k , so dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Gruppe weniger als k Frauen befinden, kleiner als 20% ist.
- f) Die Laufzeit einer Frau, die im Ziel ankommt, wird durch eine normal verteilte Zufallsgröße mit einer Standardabweichung von 44 min beschrieben. Die Abbildung zeigt den Graphen einer zugehörigen Dichtefunktion. Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Laufzeit einer Frau zwischen vier und fünf Stunden beträgt. Beurteilen Sie die folgende Aussage: „Der Abbildung entnimmt man, dass die Wahrscheinlichkeit einer Zeit von genau vier Stunden etwa 0,7% beträgt.“



Lösungen**2 Stochastik**

- a) Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit, dass aus der Gruppe mehr als 115 Läufer im Ziel ankommen, beträgt ca. 50,7%.
- b) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = 0,77$.

$$P(A) = P(X = 110) \approx 0,0424$$

$$P(B) = P(X < 119) = P(X \leq 118) \approx 0,716$$

- c) Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit $n = 45000$ und $p = 0,77$.

$$\text{Erwartungswert: } E(Y) = \mu = n \cdot p = 45000 \cdot 0,77 = 34650$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{45000 \cdot 0,77 \cdot (1-0,77)} \approx 89,3$$

$$P(\mu - 0,5\sigma < Y < \mu + 0,5\sigma) = P(34605,35 < Y < 34694,65)$$

$$= P(34606 \leq Y \leq 34694) = P(Y \leq 34694) - P(Y \leq 34605)$$

$$\approx 0,691 - 0,309 = 0,382$$

- d) V: Mangelnde Vorbereitung
S: Schmerzen während des Laufs

Eintrag der Werte in eine Vierfeldertafel (fettgedruckte Zahlen):

	S	$\bar{S}$	
V	0,15	0,67	0,82
$\bar{V}$	0,05	0,13	0,18
	0,2	0,8	1

$$\text{Es gilt } P(S \cap \bar{V}) + P(\bar{S} \cap V) = 0,72 \Leftrightarrow 0,05 + P(\bar{S} \cap V) = 0,72 \Leftrightarrow P(\bar{S} \cap V) = 0,67$$

Aus der Vierfeldertafel ergibt sich $P(S) = 0,2$ was zu zeigen war.

Prüfung der stochastischen Unabhängigkeit von S und V:

Die Ereignisse S und V sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(S \cap V) = P(S) \cdot P(V)$$

$$P(S \cap V) = 0,15$$

$$P(S) \cdot P(V) = 0,2 \cdot 0,82 = 0,164$$

Da $P(S \cap V) \neq P(S) \cdot P(V)$ gilt, sind die Ereignisse nicht stochastisch unabhängig.

- e) Die Zufallsgröße Z ist die Anzahl der Frauen in dieser Gruppe.
 Z ist binomialverteilt mit $n = 1000$ und $p = 0,34$.

Gesucht ist der größte Wert von k , so dass $P(Z < k) < 0,2$ ist.

Probe mit dem TR:

$$P(Z \leq 326) = P(Z < 327) \approx 0,184$$

$$P(Z \leq 327) = P(Z < 328) \approx 0,202$$

Die gesuchte Zahl k ist somit 327.

- f) Die Zufallsgröße L ist die Laufzeit einer Frau in Minuten.
 L ist normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma = 44$ min.

Die Maximalstelle des Schaubildes entspricht dem Erwartungswert von L ,
also $\mu \approx 270$.

$$4 \text{ Stunden} = 240 \text{ min}$$

$$5 \text{ Stunden} = 300 \text{ min}$$

$$P(240 \leq L \leq 300) \approx 0,505 \text{ (Taschenrechner)}$$

Die Aussage „Der Abbildung entnimmt man, dass die Wahrscheinlichkeit einer Zeit von genau vier Stunden etwa 0,7% beträgt.“ ist falsch.

Die y-Werte der Dichtefunktion stellen keine Wahrscheinlichkeiten dar.

Tatsächlich gilt: $P(Z=240) = 0$.