

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024  
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

**Baden-Württemberg**

**Teil B – Analysis Aufgabensatz 1**

**Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe**

**berufliche Gymnasien**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

# 1 Analysis

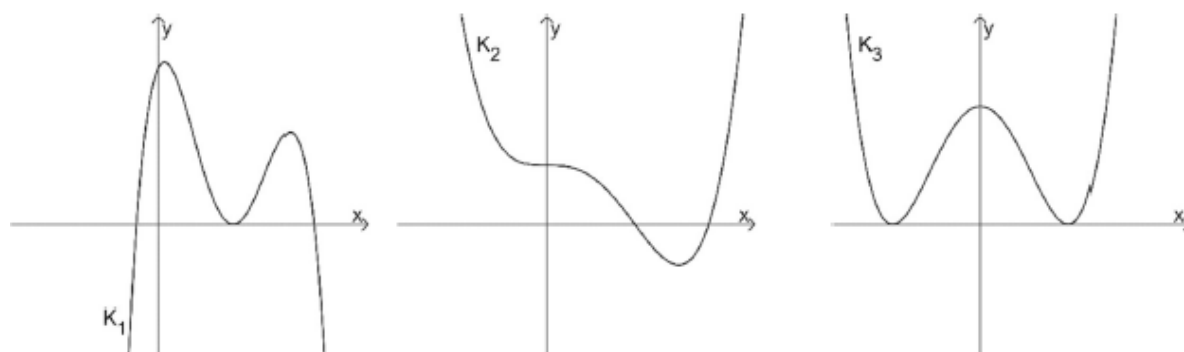
## 1.1 (a) 6 BE b) 5 BE c) 1 BE d) 6 BE e) 4 BE)

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  durch  $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ .

Ihr Graph ist K.

a) Einer der drei Graphen entspricht K.

Beurteilen Sie für jeden Graph, ob es sich um K handeln kann.



b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte, in denen K eine waagrechte Tangente hat.

Geben Sie für jeden dieser Punkte an, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt.

c) Weisen Sie nach, dass  $f$  bei  $x = 2$  eine Nullstelle hat.

Neben dem Wendepunkt  $W(2|0)$  besitzt K einen weiteren Wendepunkt  $S(0|f(0))$ .

Der Punkt  $P(1|\frac{4}{3})$  liegt oberhalb des Graphen von  $f$ .

d) Weisen Sie nach, dass sich die beiden Wendetangenten im Punkt P schneiden.

e) Das Dreieck PSW wird von K in zwei Teile geteilt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilfläche oberhalb von K.

**1.2 (a) 2 BE b) 6 BE c) 2 BE d) 3 BE e) 5 BE)**

Die  $\text{CO}_2$ -Konzentration in der Atmosphäre wird seit 1958 durchgehend gemessen. Dabei sind die jährlichen Werte der Jahre 2012 bis 2022 in folgender Tabelle eingetragen. Die  $\text{CO}_2$ -Konzentration wird in Millionstel (ppm, „parts per million“) angegeben.

| Jahr | $\text{CO}_2$ (ppm) |
|------|---------------------|
| 2012 | 394,06              |
| 2013 | 396,74              |
| 2014 | 398,81              |
| 2015 | 401,01              |
| 2016 | 404,41              |
| 2017 | 406,76              |
| 2018 | 408,72              |
| 2019 | 411,65              |
| 2020 | 414,21              |
| 2021 | 416,41              |
| 2022 | 418,53              |

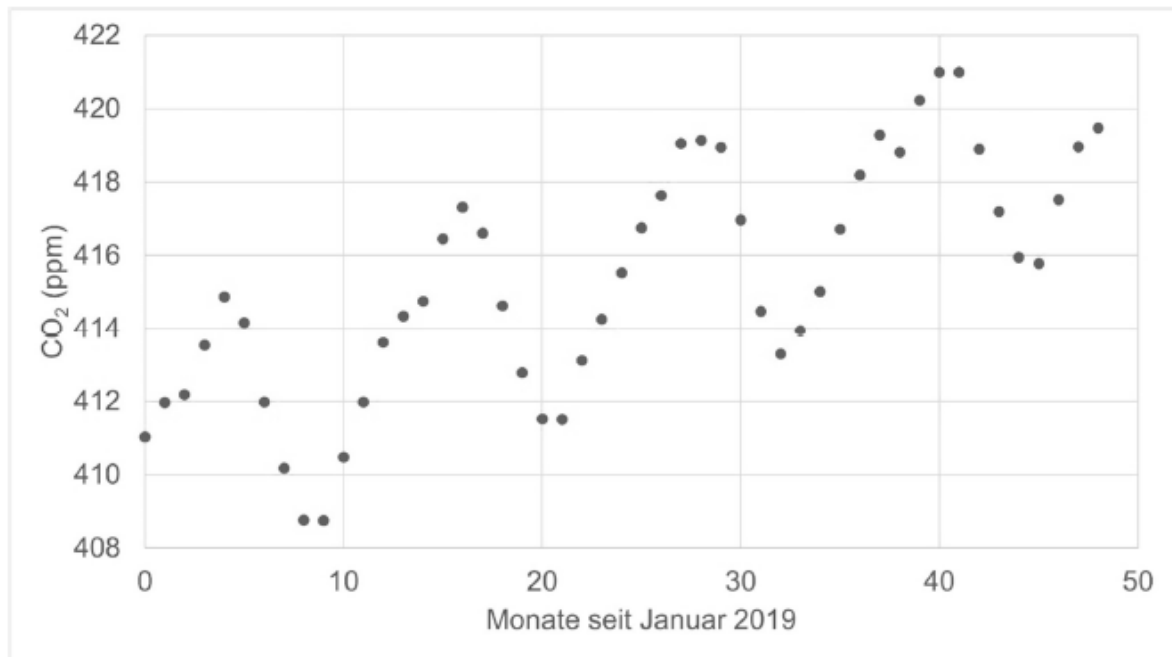
Quelle:

Dr. Pieter Tans, NOAA/GML and Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography

URL: <https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/data.html>, heruntergeladen am 15.05.2023

- Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate der  $\text{CO}_2$ -Konzentration im Zeitraum 2012 bis 2022.
- Ermitteln Sie ein mathematisches Modell für den gegebenen Verlauf der  $\text{CO}_2$ -Konzentration. Geben Sie dazu eine geeignete Funktionsgleichung an. Begründen Sie Ihre Auswahl.
- Berechnen Sie die  $\text{CO}_2$ -Konzentration, die laut Ihrem Modell im Jahr 2100 zu erwarten ist.
- Deuten Sie im Sachzusammenhang, warum ein mathematisches Modell, das auf Messungen innerhalb der Jahre 2012 bis 2022 beruht, nicht grundsätzlich für eine Vorhersage der  $\text{CO}_2$ -Konzentration im Jahr 2100 verwendet werden kann.

Der Verlauf der monatlichen Mittelwerte der  $\text{CO}_2$ -Konzentration ist für die Jahre 2019 bis 2022 in der Abbildung dargestellt. Darin sind neben einem langfristigen Trend auch die Schwankungen innerhalb eines Jahres zu erkennen.



- e) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen den abgebildeten Zusammenhang am besten wiedergibt. Begründen Sie Ihre Auswahl.

$$f(x) = 0,19x + 2,95 \cdot \sin(0,53 \cdot (x - 0,17)) + 410,7$$

$$g(x) = 3,14 \cdot \sin(0,53 \cdot (x + 0,14)) + 415,3$$

$$h(x) = 0,21x + 2,84 \cdot \sin(0,51 \cdot (x - 0,24)) + 411,2$$

$$j(x) = 0,18x + 3,09 \cdot \sin(1,29 \cdot (x - 0,09)) + 409,2$$

**Lösungen****1 Analysis****1.1**

- a)  $K_1$  verläuft vom 3. in den 4. Quadranten. Da der Koeffizient vor der höchsten  $x$ -Potenz im Funktionsterm positiv ist ( $\frac{1}{12}x^4$ ), stimmt das Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$  von  $K_1$  nicht mit dem von  $K$  überein.

$K_3$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse. Da der Funktionsterm von  $f$  sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von  $x$  aufweist, stimmt das Symmetrieverhalten von  $K_3$  nicht mit dem von  $K$  überein.

$K_2$  verläuft vom 2. in den 1. Quadranten.  $K_2$  ist weder achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Somit stimmen sowohl das globale Verhalten als auch das Symmetrieverhalten von  $K_2$  mit dem von  $K$  überein.

b) Es gilt  $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$

Daraus folgt  $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $f''(x) = x^2 - 2x$ .

Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I):  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Gleichung II):  $\frac{1}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Kontrolle für  $x = 3$ :  $f''(3) = 3 > 0$  also liegt eine Minimalstelle bei  $x = 3$  vor

Wegen  $f(3) = -\frac{11}{12}$  existiert der Tiefpunkt  $T(3 | -\frac{11}{12})$

Kontrolle für  $x = 0$ :  $f''(0) = 0$  damit ist keine Aussage möglich

Kontrolle, ob ein VZW bei  $f'$  vorliegt:  $f'(-1) = -\frac{4}{3} < 0$  und  $f'(1) = -\frac{2}{3} < 0$

Da kein VZW vorliegt, liegt bei  $x = 0$  eine Sattelstelle vor.

Wegen  $f(0) = \frac{4}{3}$  existiert der Sattelpunkt  $S(0 | \frac{4}{3})$

Hinweis: Die Art der Punkte (Tiefpunkt bei  $x = 3$  und Sattelpunkt bei  $x = 0$ ) hätte man auch aus dem Schaubild  $K_2$  ablesen können.

c) Da die Nullstelle  $x = 2$  bereits vorgegeben ist, kann diese direkt überprüft werden:

$$f(2) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 0 \text{ was zu zeigen war}$$

d) Gleichung der Wendetangente an der Stelle  $x = 0$ :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

Mit  $f'(0) = 0$  und  $f(0) = \frac{4}{3}$  folgt für die Tangentengleichung:

$$y = 0 \cdot (x - 0) + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t_0(x) = \frac{4}{3}$$

Gleichung der Wendetangente an der Stelle  $x = 2$ :

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$$

Mit  $f'(2) = -\frac{4}{3}$  und  $f(2) = 0$  folgt für die Tangentengleichung:

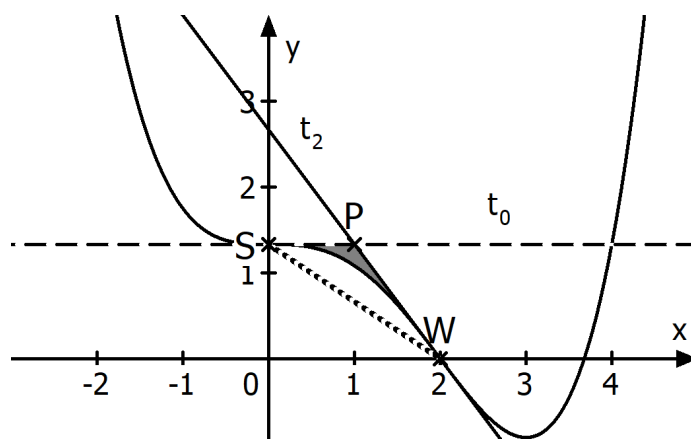
$$y = -\frac{4}{3} \cdot (x - 2) + 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow t_2(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$

Kontrolle, ob der Punkt  $P(1 | \frac{4}{3})$  auf den beiden Tangenten liegt:

Es gilt  $t_0(1) = \frac{4}{3}$  und  $t_2(1) = \frac{4}{3}$

Damit ist  $P(1 | \frac{4}{3})$  der Schnittpunkt der Wendetangenten.

e) Skizze:



Gesucht ist der Inhalt der grau markierten Fläche:

Das Viereck OWPS ist ein Trapez.

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\overline{OW} + \overline{PS}}{2} \cdot \overline{OS} = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$$

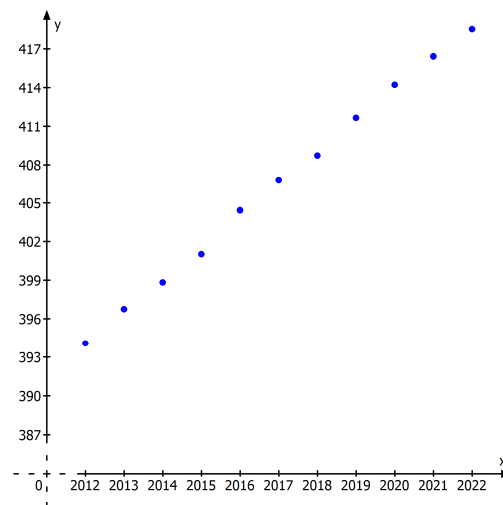
$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left( \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3} \right) dx = \left[ \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{4}{3}x \right]_0^2 = \frac{28}{15}$$

$$\text{Flächeninhalt der grau markierten Fläche: } A_{\text{grau}} = 2 - \frac{28}{15} = \frac{2}{15}$$

## 1.2

a) Durchschnittliche Änderungsrate:  $\frac{418,53 - 394,06}{2022 - 2012} = 2,45 \text{ ppm pro Jahr}$

b) Skizze der Punkte:



Die Punkte liegen näherungsweise auf einer Geraden.

Dies kann man auch daran erkennen, dass der Abstand zwischen den y-Werten der einzelnen Jahre ähnlich groß sind (maximal 2,93 und minimal 1,96).

Ansatz für die Geradengleichung:  $y = mx + c$

Als Steigung kann die durchschnittliche Änderungsrate 2,45 aus a) benutzt werden.

Einsetzen des Punktes P(2012/394,06) in die Gerade:

$$394,06 = 2,45 \cdot 2012 + c \Leftrightarrow c = -4535,34$$

Funktionsgleichung:  $k(x) = 2,45x - 4535,34$

c) Einsetzen von  $x = 2100$ :  $k(2100) = 609,66$

Laut Modell ist im Jahr 2100 mit einer  $\text{CO}_2$ -Konzentration von ca. 610 ppm zu rechnen.

d) Es ist nicht gesichert, dass sich die  $\text{CO}_2$ -Konzentration bis zum Jahr 2100 genauso wie im Zeitraum 2012 bis 2022 weiterentwickelt. Beispielsweise könnten Klimaschutzmaßnahmen diese Entwicklung beeinflussen.

e) Aus der Abbildung ist ablesbar, dass die y-Werte der periodischen Anteile wie eine Gerade anwachsen. Daher setzt sich die Funktionsgleichung additiv aus einer linearen Funktion der Gestalt  $y = mx + c$  und einer trigonometrischen Funktion zusammen. Daher kommen nur die Funktionen f und j in Betracht.

Periode des trigonometrischen Anteils bei f:  $p_f = \frac{2\pi}{0,53} \approx 11,9$

Periode des trigonometrischen Anteils bei j:  $p_j = \frac{2\pi}{1,29} \approx 4,9$

Aus dem Schaubild kann man ablesen, dass der trigonometrische Anteil eine Periode besitzt, die größer als 10 ist.

Somit kommt nur f als Funktionsgleichung in Betracht.