

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil A – Wahlaufgaben (A5) / Problemlöseaufgabe (A6)

Hilfsmittel:

A5: keine

A6: WTR und Merkhilfe

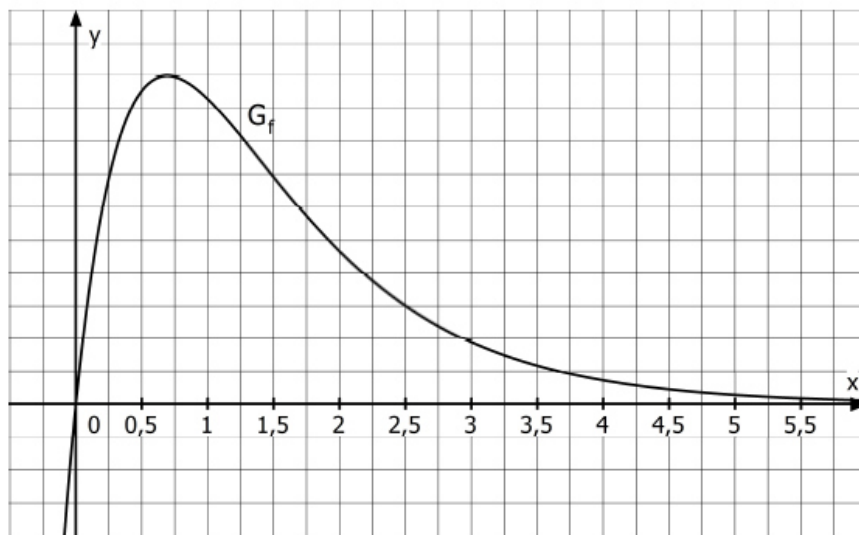
berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

5/1 Analysis (2 BE und 3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \rightarrow e^{-x} - e^{-2x}$. G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = 0$ und hat einen Hochpunkt an der Stelle x_H .



- a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass x_1 die einzige Nullstelle von f ist.
- b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Abbildung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f''(0,5) > 0$

(2) $\int_0^2 f(x) dx < 2 \cdot f(x_H)$

5/2 Analysis (1 BE und 4 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x - 1)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Graph ist K_f .

- a) Geben Sie die Nullstellen von f an.
- b) Betrachtet wird die Tangente an K_f im Schnittpunkt von K_f mit der y -Achse. Zeigen Sie, dass diese Tangente mit K_f einen gemeinsamen Punkt auf der x -Achse hat.

5/3 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Gegeben sind die beiden 2x2-Matrizen A und B sowie der Vektor $\vec{v}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie rechnerisch, dass B eine inverse Matrix zu A ist.
- b) Geben Sie eine mögliche Fragestellung an, die durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems beantwortet werden kann.

$$\begin{array}{rcl} 2v_1 & -v_2 & = 1 \\ -3v_1 & +v_2 & = 2 \end{array}$$

5/4 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Für eine reelle Zahl a ist die Gerade g durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Außerdem wird die Ebene E beschrieben durch $E: x_1 + x_2 = 3$.

- a) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass sich g und E orthogonal schneiden.
- b) Für $a = 1,5$ schneidet g die x_1 -Achse im Punkt P und die Ebene E im Punkt $S(1|2|3)$. Zudem ist der Punkt $Q(1|2|0)$ bekannt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQS .

6 Stochastik (Problemlöseaufgabe) (10 BE)

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentieren und reflektieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Drei zufällig mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählte, verschiedene Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks (d.h. alle Seiten sind gleich lang, alle Innenwinkel betragen 108°) werden zu einem Dreieck verbunden.

Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Mittelpunkt des Fünfecks innerhalb des Dreiecks liegt.

Lösungen**5/1 Analysis**

a) Nullstelle von f : $f(x) = 0$

$$e^{-x} - e^{-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(1 - e^{-x}) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

$$\text{Gleichung II): } 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$$

Damit ist $x_1 = 0$ die einzige Nullstelle von f .

b)

(1) Der Graph von f ist an der Stelle $x = 0,5$ rechtsgekrümmt, daher ist $f''(0,5) < 0$.
Die Aussage ist falsch.

(2) Die Fläche $A_1 = \int_0^2 f(x) dx$ beschreibt den Inhalt der Fläche zwischen dem
Schaubild von f und der x -Achse im Intervall $[0;2]$.

Die Fläche $A_2 = 2 \cdot f(x_H)$ beschreibt den Inhalt der Rechtecksfläche mit der
Breite 2 und der Höhe $f(x_H)$ (also dem y -Wert des Hochpunktes).

Mit Hilfe der Abbildung erkennt man, dass $A_2 > A_1$ ist. Die Aussage ist wahr.

5/2 Analysis

a) Nullstellen von f : $f(x) = 0$

$$(x^2 - 4) \cdot (x - 1) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\text{Gleichung II): } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Es gilt $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x - 1) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

$$\text{Daraus folgt } f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$$

$$\text{Allgemeine Tangentenformel: } y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

$$\text{Einsetzen der Berührstelle } u = 0: y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$\text{Es gilt } f'(0) = -4 \text{ und } f(0) = 4.$$

$$\text{Tangentengleichung: } y = -4(x - 0) + 4 \Leftrightarrow y = -4x + 4$$

Da die Tangente den y-Achsenabschnitt 4 und eine negative Steigung besitzt, ist die Nullstelle der Tangente positiv.

Die gemeinsame Nullstelle mit der Funktion f kann daher nur $x = 1$ oder $x = 2$ sein.

$$\text{Prüfung für } x = 1: y = -4 \cdot 1 + 4 = 0$$

Damit schneidet die Tangente bei $x = 1$ die x-Achse und dies ist die gemeinsame Nullstelle.

5/3 Lineare Algebra

a) B ist die Inverse von A , wenn $A \cdot B = E$ oder $B \cdot A = E$ gilt, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix ist.

$$\text{Es gilt } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ was zu zeigen war.}$$

b) Die linke Seite des Gleichungssystems entspricht dem Term $A \cdot \vec{v}$

$$\text{Fragestellung: Bestimme die Koordinaten des Vektors } \vec{v} \text{ so, dass gilt: } A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5/4 Lineare Algebra

- a) Die Gerade g ist orthogonal zu E , wenn der Richtungsvektor von g ein Vielfaches zum Normalenvektor von E ist:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 1 und 2 folgt: $k = 1$

Aus Zeile 3 folgt $a = 0$

Für $a = 0$ ist die Gerade g orthogonal zu E .

- b) Schnittpunkt der Gerade mit der x_1 -Achse:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Zeile und 3. Zeile folgt: $t = -2$.

Daraus folgt $x_1 = -1$.

Der Punkt P hat die Koordinaten $P(-1|0|0)$.

Der Vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt in der x_1x_2 -Ebene.

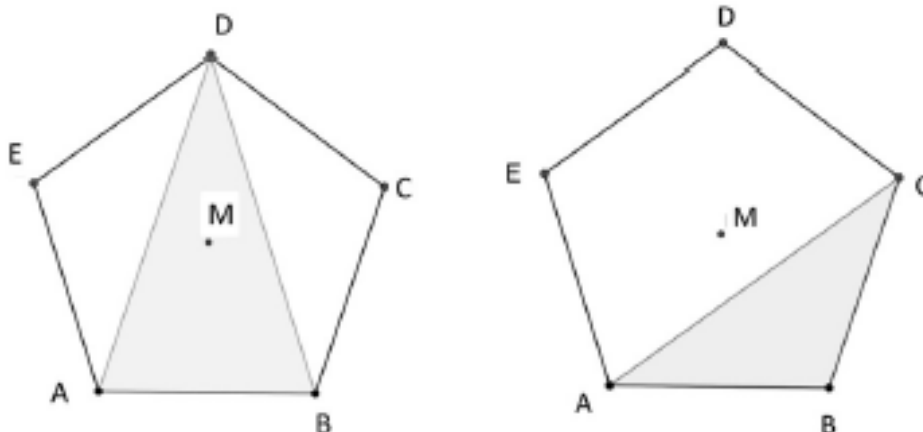
Da der Punkt S senkrecht über Q liegt, ist $\overrightarrow{QS}$ orthogonal zu $\overrightarrow{PQ}$.

$$A_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QS}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{9} = \frac{3}{2} \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$$

6 Stochastik (Problemlöseaufgabe)

Analyse:

Skizze von Fünfecken mit Mittelpunkt M und einzeichnen von Dreiecken, bei denen der Mittelpunkt M innerhalb bzw. außerhalb des Dreiecks liegt.



Durchführung:

Es gibt $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten, von 5 Eckpunkten 3 Punkte (ohne Reihenfolge und ohne Wiederholung) auszuwählen, die ein Dreieck ergeben.

Liegen die drei Punkte nebeneinander, liegt M nicht innerhalb des Dreiecks. Dies ist für folgende Dreiecke der Fall (z.B. rechte Abbildung)
ABC, BCD, CDE, DEA, EAB (also 5 Dreiecke)

Liegen die drei Punkte nicht nebeneinander, liegt M innerhalb des Dreiecks. Dies ist für folgende Dreiecke der Fall (z.B. linke Abbildung)
ABD, BCE, CDA, DEB, EAC (also 5 Dreiecke)

Bei 5 von insgesamt 10 möglichen Dreiecken liegt der Punkt M innerhalb des Dreiecks.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$