

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2024
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil A - Pflichtaufgaben

**Hilfsmittel: keine
berufliche Gymnasien**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

1 Analysis (3 BE und 2 BE)

Gegeben ist eine im Intervall $[-4;4]$ definierte Polynomfunktion f vom Grad 3. Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung und schneidet die x -Achse im Punkt $N(4|0)$.

Der Wertebereich von f ist $W_f = [-2;2]$.

- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f , wenn bekannt ist, dass $f'(0) < 0$ gilt.
- Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung einer trigonometrischen Funktion g , sodass f und g im Intervall $[-4;4]$ dieselben Nullstellen haben.

2 Analysis (1 BE und 2 BE und 2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -2x + e^{4x}$.

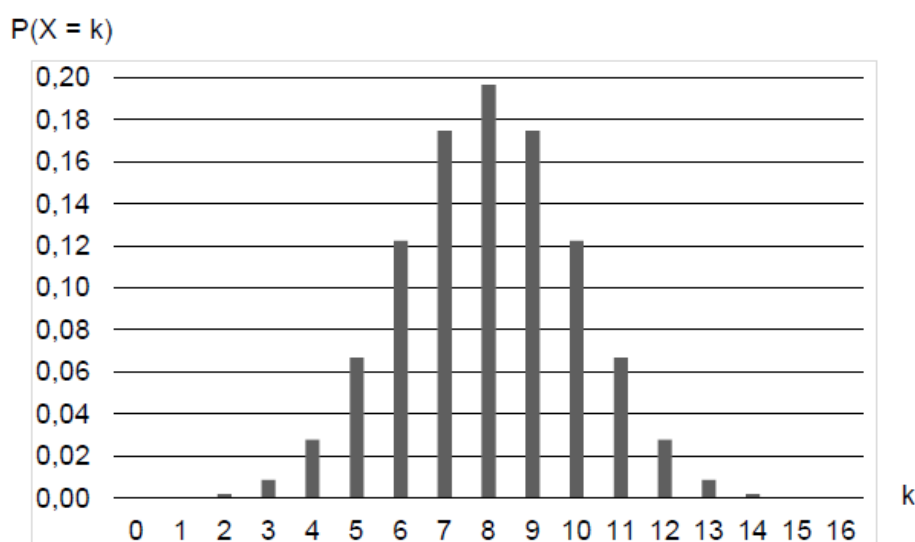
- Geben Sie eine Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.
- Bestimmen Sie den x -Wert, an dem der Graph von f die Steigung 2 hat.
- Zeigen Sie, dass der Graph von f keinen Wendepunkt hat.

3 Stochastik (1 BE und 2 BE und 2 BE)

Eine Urne enthält 15 weiße und 15 rote Kugeln. Aus dieser 16-mal mit Zurücklegen gezogen.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an.

Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .



- Geben Sie den Erwartungswert von X an.
- Bestimmen Sie mit Hilfe von Werten aus der Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(6 \leq X \leq 7)$.
- Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an. Erläutern Sie, warum die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ebenfalls durch die Abbildung oben dargestellt werden kann.

4 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(1|3|3)$, $B(9|-1|-5)$, $C(3|5|-5)$ und $M(5|1|-1)$.

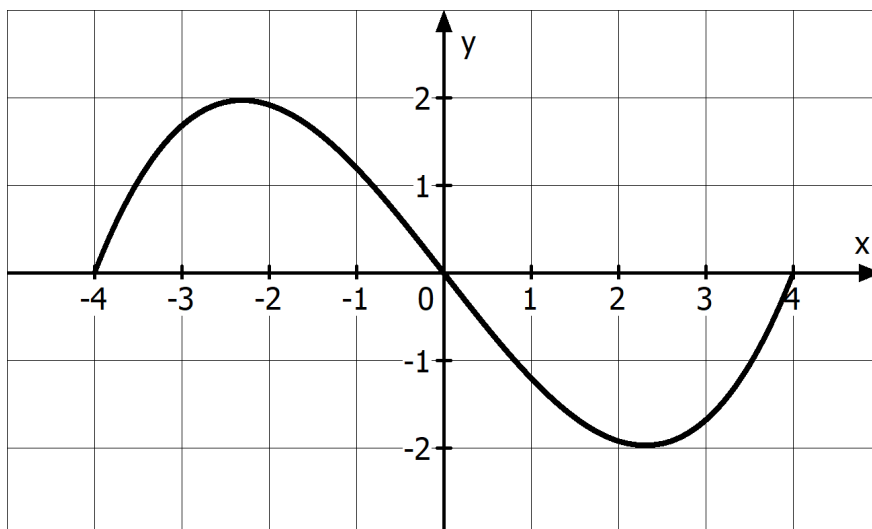
a) Weisen Sie folgende Sachverhalte nach:

- (1) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AB.
- (2) Die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MC}$ schließen einen rechten Winkel ein.

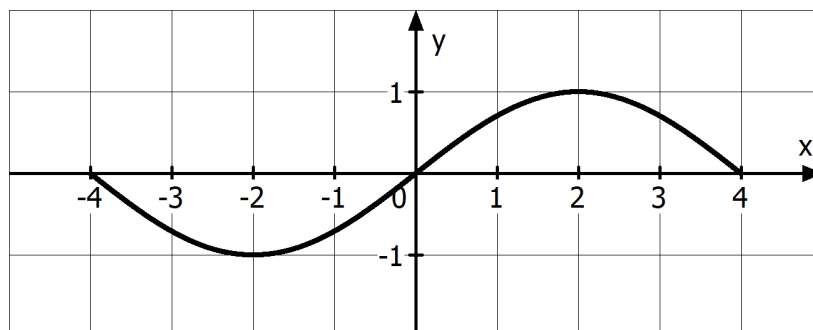
b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der doppelt so weit vom Punkt M entfernt ist wie vom Punkt C.

Lösungen**1 Analysis**

a) Skizze einer möglichen Funktion:



b) Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion, die diese Eigenschaft erfüllt, könnte so aussehen:



Es handelt sich um eine Sinusfunktion mit der Periode $p = 8$.

Funktionsansatz: $g(x) = \sin(bx)$ mit $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Eine mögliche Funktionsgleichung lautet $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$

2 Analysis

a) $f(x) = -2x + e^{4x}$

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{4x} \rightarrow 0$.

Das Schaubild von f nähert sich für $x \rightarrow -\infty$ der (schiefen) Asymptote $y = -2x$ an.

b) Es gilt $f'(x) = -2 + 4e^{4x}$.

Bedingung: $f'(x) = 2$

$$-2 + 4e^{4x} = 2 \Leftrightarrow 4e^{4x} = 4 \Leftrightarrow e^{4x} = 1 \Leftrightarrow 4x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$$

c) Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0$

Es gilt $f''(x) = 16e^{4x}$

Da die Gleichung $16e^{4x} = 0$ nicht lösbar ist, da $e^{4x} \neq 0$ ist, kann die notwendige Bedingung nicht erfüllt werden. Daher hat der Graph von f keinen Wendepunkt.

3 Stochastik

- a) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 16$ und $p = 0,5$.
Erwartungswert von X : $\mu = n \cdot p = 16 \cdot 0,5 = 8$

Man könnte den Erwartungswert auch direkt aus der Abbildung ablesen – es handelt sich um die Stelle mit dem höchsten Balken.

b) $P(6 \leq X \leq 7) = P(X = 6) + P(X = 7) \approx 0,12 + 0,175 = 0,295$

- c) Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit $n = 16$ und $p = 0,5$.
 Y besitzt daher dieselbe Verteilung wie X (siehe a)).
Daher kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y durch die Abbildung dargestellt werden.

4 Lineare Algebra

a)

(1) Mittelpunkt der Strecke AB:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also } M(5|1|-1) \text{ was zu zeigen war.}$$

(2) Nachweis rechter Winkel:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$$

Da das Skalarprodukt Null ergibt, schließen die Vektoren einen rechten Winkel ein.

b) Skizze:



Es gibt zwei mögliche Lösungspunkte P und Q:

Der Punkt P teilt die Strecke MC im Verhältnis 2:1

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 11/3 \\ -11/3 \end{pmatrix}, \text{ also } P(\frac{11}{3} | \frac{11}{3} | -\frac{11}{3})$$

Der Punkt Q liegt außerhalb der Strecke MC. C ist der Mittelpunkt der Strecke MQ.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}, \text{ also } Q(1|9|-9)$$