Hauptprüfung Abiturprüfung 2024 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Analytische Geometrie – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe II 2

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$ und die Schar der Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie, ob g_4 orthogonal zu $g_{0,5}$ ist. (2 BE)

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den g_4 mit E einschließt. (3 BE)

c) Untersuchen Sie, ob eine Gerade der Schar den Ursprung enthält. (3 BE)

d) Alle Geraden der Schar liegen in der Ebene F. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von F.
(*zur Kontrolle:* $x_1 - 2x_2 - x_3 = -8$) (4 BE)

Betrachtet werden die Punkte $P_r(1+r\,|\,2-2r\,|\,5-r)$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$.

e) Begründen Sie, dass die Punkte P_r auf einer zu F orthogonalen Gerade liegen. (3 BE)

f) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Jeder Punkt P_r *hat von jeder Gerade der Schar den Abstand* $\sqrt{6} \cdot r$. (4 BE)

g) Gegeben ist die Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$

Zeigen Sie, dass k in F liegt, aber nicht zur Schar gehört. (3 BE)

h) Die Schnittpunkte aller Gerade g_a mit der x_1x_2-Ebene liegen auf der Gerade h.
Auf h gibt es einen Punkt, der auf keiner Gerade g_a liegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts. (3 BE)

Lösungen

Aufgabe II 2

a) Richtungsvektor von g_4: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von $g_{0,5}$: $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0$

Somit sind die Geraden orthogonal.

b) $$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+1+4} \cdot \sqrt{9+36+4}} = \frac{10}{\sqrt{21} \cdot 7} \approx 0,312$$

$\alpha = \sin^{-1}(0,312) = 18,2°$

c) Punktprobe mit O(0|0|0):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rll} 1 & +at & = 0 \\ 2 & +t & = 0 \\ 5 & +t(a-2) & = 0 \end{array}$$

Aus Zeile 2 folgt: t = -2
Aus der Zeile 1 folgt: $1 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0,5$
Kontrolle mit Zeile 3: $5 - 2(0,5-2) = 0$ ist eine falsche Aussage

Es gibt keine Gerade, die den Ursprung enthält.

d) Wähle zwei beliebige Geraden: $g_0 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gleichung der Ebene F, die die beiden sich schneidenden Geraden enthält:

$$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor von F: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{n^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung F: $x_1 - 2x_2 - x_3 = d$
Einsetzen von P(1|2|5) ergibt d = -8.

Koordinatengleichung: F: $x_1 - 2x_2 - x_3 = -8$

e) Die Punkte $P_r(1+r \mid 2-2r \mid 5-r)$ liegen auf einer Gerade mit folgender Gleichung:

n: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 2-2r \\ 5-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor der Geraden ist ein Normalenvektor von F.
Damit ist die Gerade orthogonal zur Ebene F.

f) Aus d) folgt: Alle Geraden g_a liegen in der Ebene F und enthalten den Punkt Q(1|2|5).
Die Punkte P_r liegen auf der Gerade n aus e). Auch die Gerade h enthält den Punkt Q(1|2|5).

Somit ist der gesuchte Abstand $\left|\overrightarrow{QP_r}\right| = \left|\begin{pmatrix} r \\ -2r \\ -r \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2 + 4r^2 + r^2} = \sqrt{6r^2} = r \cdot \sqrt{6}$

Die Aussage ist wahr.

g) Einsetzen der Gerade k in die Koordinatengleichung von F:

$(1+s) - 2 \cdot 2 - (5+s) = -8$
$\Leftrightarrow 1 + s - 4 - 5 - s = -8 \Leftrightarrow -8 = -8$

Da sich eine wahre Aussage ergibt, liegt die Gerade k in der Ebene F.

Die Gerade k ist parallel zur x_1x_3-Ebene, da die zweite Koordinate im Richtungsvektor 0 ist.

Da bei der Geradenschar g_a die zweite Koordinate im Richtungsvektor nicht null ist, gibt es keine Schargerade, die parallel zur x_1x_3-Ebene ist.

h) Alle Geraden g_a liegen in der Ebene F. Somit ist h die Schnittgerade von F mit der x_1x_2-Ebene.

Die Spurpunkte von F lauten $S_1(-8\,|\,0\,|\,0)$ und $S_2(0\,|\,4\,|\,0)$.

Somit lautet die Gleichung von h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

*D*ie Gerade k aus g) liegt in der Ebene F. Die Gerade k hat mit jeder Gerade g_a aber nur den Punkt P(1|2|5) gemeinsam und liegt nicht in der Schar g_a.

Berechnung des Schnittpunktes von k mit der x_1x_2-Ebene:

$x_3 = 5 + s = 0 \Leftrightarrow s = -5$

Einsetzen von s = -5 in k ergibt Punkt S(-4|2|0).

Kontrolle, dass der Punkt S auf h liegt:

$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine wahre Aussage für t = 0,5.

Somit ist S der gesuchte Punkt.