

Hauptprüfung Abiturprüfung 2024 - Leistungsfach
Baden-Württemberg

Teil B Analytische Geometrie – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe II 1

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt.

Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

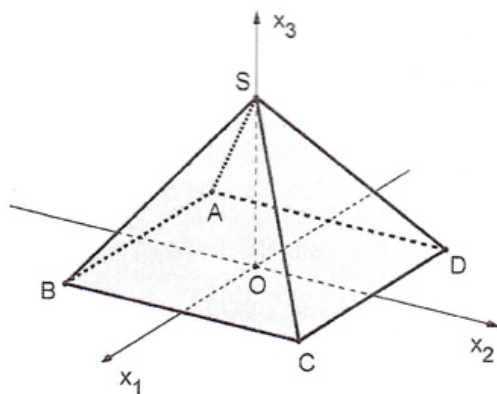


Abb. 1

- a) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. (4 BE)
- b) Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.
- (1) $x_1 - x_3 = 0$
 (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
 (3) $x_1 + x_2 = 0$ (3 BE)
- c) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
 (zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 = 12$) (3 BE)
- d) Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$(I) \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (II) \quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12 \quad (III) \quad |\overrightarrow{PQ}| = p$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen. (5 BE)

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k : 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3x_3 = 12$ mit $k \in [-1; 1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1 .

e) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist. (1 BE)

f) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist. (4 BE)

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2 -Ebene in einer Geraden g_k .

Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

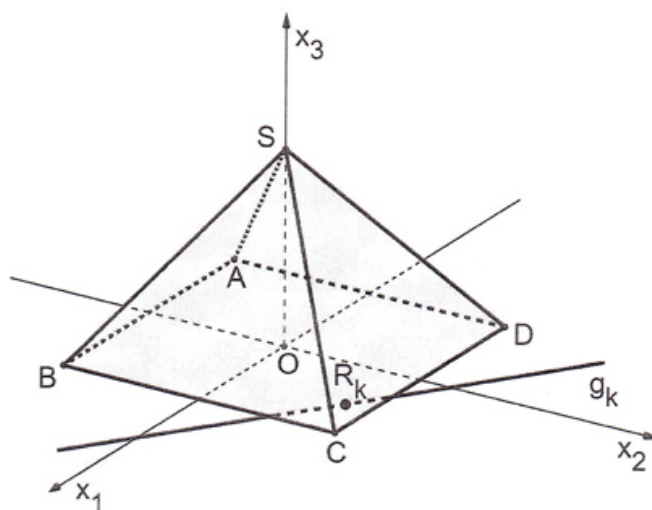


Abb. 2

g) Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein. (2 BE)

h) Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1 , dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. (3 BE)

Lösungen**Aufgabe II 1**

a) Flächeninhalt des Dreiecks CDS:

Länge der Grundseite: $\overline{CD} = 6$ LE

Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ ist $M(0|3|0)$.

Höhe des Dreiecks CDS: $h = \overline{MS} = |\overline{MS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+16} = 5$ LE

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$

Oberfläche der Pyramide: $O = A_{\text{Grundfläche}} + 4 \cdot 15 = 6 \cdot 6 + 60 = 96$ FE

b) Eine Symmetrieebene der Pyramide muss die x_3 -Achse enthalten.

Das heißt, dass die Variable x_3 nicht in der Koordinatengleichung vorkommen darf und das Ergebnis der Koordinatengleichung 0 sein muss. Damit muss es Gleichung (3) sein.

Gleichung (1) ist beispielsweise nicht möglich, weil die Symmetrieebene den Punkt S enthalten muss und die Koordinaten von S nicht die Gleichung (1) erfüllen.

c) Parameterform der Ebene E: $\vec{x} = \overline{OC} + r \cdot \overline{CD} + s \cdot \overline{CS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

E: $4x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen von $C(3|3|0)$: $12 + 0 = d \Leftrightarrow d = 12$

Koordinatenform von E: $4x_2 + 3x_3 = 12$

d) I: Die Gleichung entspricht der Lotgeraden zur Ebene E (Richtungsvektor ist der Normalenvektor von E) durch den Punkt P. Der Punkt Q liegt auf dieser Lotgeraden.

II: Hier wird der Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene E berechnet. Der Punkt Q ist daher der Schnittpunkt von E mit der Lotgeraden.

III: Der Abstand von P zum Punkt Q (und damit der Abstand von P zur Ebene E) stimmt mit dem Abstand von P zur Grundfläche überein.

Hinweis: Da die x_3 -Koordinate von P gleich p ist, ist p der Abstand von P zur Grundfläche (also zur $x_1 - x_2$ -Ebene).

e) Einsetzen von $S(0|0|4)$ in die Ebenenschar:

$$4k \cdot 0 + 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12$$

Da die Aussage wahr ist unabhängig von k, liegt S auf allen Ebenen der Schar.

f) Schnittwinkel der Ebene E mit der Gerade OS mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16k^2 + 16(1-k^2) + 9} \cdot \sqrt{16}} = \frac{12}{\sqrt{16+9} \cdot 4} = \frac{3}{5}$$

Da das Ergebnis unabhängig von k ist, ist die Größe des Winkels unabhängig von k.

g) Die Ebene E_{-1} entspricht laut Aufgabenstellung der Ebene durch die Punkte ADS.

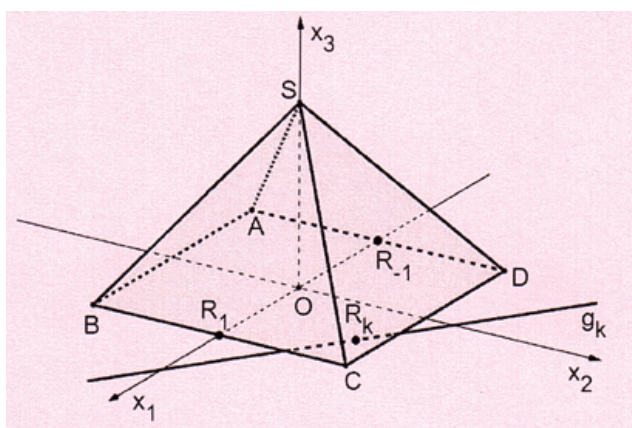
Die Gerade g_{-1} ist die Gerade durch die Punkte A und D.

Der Punkt $R_{-1}(-3|0|0)$ ist der Punkt auf g_{-1} mit dem kleinsten Abstand zu $O(0|0|0)$.

Die Ebene E_1 entspricht laut Aufgabenstellung der Ebene durch die Punkte BCS.

Die Gerade g_1 ist die Gerade durch die Punkte B und C.

Der Punkt $R_1(3|0|0)$ ist der Punkt auf g_1 mit dem kleinsten Abstand zu $O(0|0|0)$.



h) Der Körper ist ein halber Kegel mit der Spitze S.

Begründung:

Die Grundfläche besteht aus den Punkten R_k .

Der Abstand der Punkte R_k vom Ursprung sind alle gleich groß, weil laut f) der Winkel zwischen der Ebenenschar und $\overline{OS}$ konstant und unabhängig von k ist.

Die eingezeichneten Randpunkte R_{-1} und R_1 der Halbkreisfläche haben den Abstand 3 vom Ursprung, daher ist der Kegelradius $r = 3$.

Die Höhe des Halbkegels ist $h = \overline{OS} = 4$

$$V_{\text{Halbkegel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 6\pi$$