

Hauptprüfung Abiturprüfung 2024 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil A - Wahlaufgaben

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

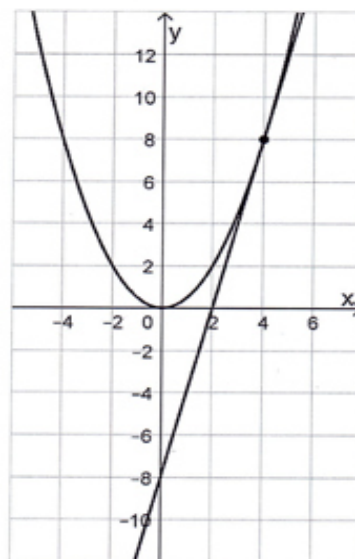
Aufgabe W1: (1 BE und 4 BE)

Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^2$.

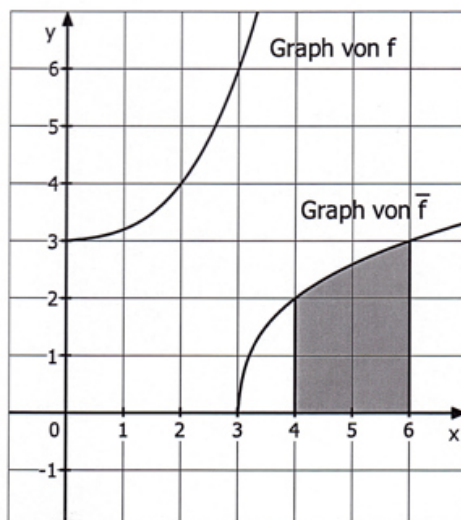
Die Abbildung zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von

$f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $\left(4 \mid f_{\frac{1}{2}}(4)\right)$.

- Geben Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Tangente t an.
- Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u \mid f_a(u))$ die y -Achse im Punkt $(0 \mid -f_a(u))$ schneidet.

**Aufgabe W2: (5 BE)**

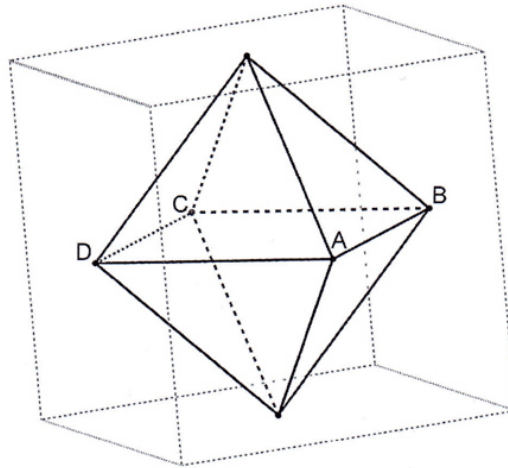
Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion f sowie ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$. F ist eine Stammfunktion von f . Die Punkte $P(4|2)$ und $Q(6|3)$ liegen auf dem Graphen von $\bar{f}$. Begründen Sie mithilfe geeigneter Eintragungen in der Abbildung, dass der Inhalt der markierten Fläche durch $10 - (F(3) - F(2))$ berechnet werden kann.



Aufgabe W3: (2 BE und 3 BE)

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung). Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B , $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.

- Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.
- Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

**Aufgabe W4: (1 BE und 4 BE)**

Gegeben ist die Schar der Geraden $g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

- Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar parallel zueinander sind.
- Betrachtet wird das Quadrat mit folgenden Eigenschaften:
 - Die Punkte $O(0|0|0)$ und $P(11|4|5)$ sind Eckpunkte des Quadrats.
 - Zwei Seiten des Quadrats liegen auf Geraden der Schar.

Weisen Sie nach, dass O und P keine benachbarten Eckpunkte dieses Quadrats sind.

Aufgabe W5: (5 BE)

Die drei nicht sichtbaren Seiten des abgebildeten Würfels sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden. Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden.



Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

- Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.
- Auf den sechs Seiten des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{1}{2}$.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seiten des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt.

Aufgabe W6: (5 BE)

Bei einem Zufallsexperiment gilt für zwei Ereignisse A und B:

- $P(A \cap B) = 3x$ mit $x > 0$
- $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P_B(A) = \frac{3}{4}$

Stellen Sie den beschriebenen Zusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar und begründen Sie, dass $x \leq \frac{1}{5}$ gelten muss.

Lösungen**Aufgabe W1:**

a) Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + c$

y-Achsenabschnitt = $c = -8$

Steigung $m = 4$

Tangentengleichung: $y = 4x - 8$

b) Allgemeine Tangentengleichung an der Stelle $x = u$: $y = f'_a(u) \cdot (x - u) + f_a(u)$

Es gilt $f_a(u) = a \cdot u^2$

Wegen $f'_a(x) = 2ax$ gilt $f'_a(u) = 2a \cdot u$.

$$y = 2a \cdot u \cdot (x - u) + a \cdot u^2$$

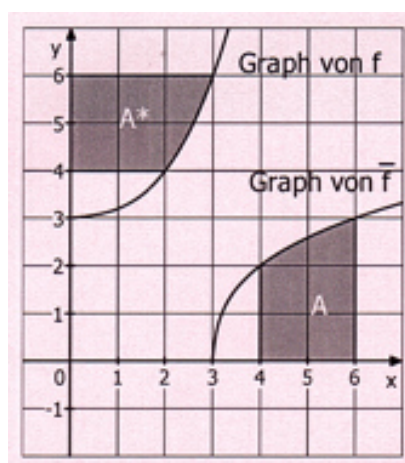
$$\Leftrightarrow y = 2au \cdot x - a \cdot u^2$$

Da der y-Achsenabschnitt der Tangente $-a \cdot u^2$ ist, schneidet die Tangente die y-Achse im Punkt $(0 | -a \cdot u^2)$

Aufgabe W2:

Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.

Somit sind die beiden grau markierten Flächen A und A^* gleich groß.



$$\begin{aligned} A = A^* &= 2 \cdot 2 + \int_2^3 (6 - f(x)) dx = 4 + [6x - F(x)]_2^3 = 4 + (18 - F(3)) - (12 - F(2)) \\ &= 10 + F(2) - F(3) = 10 - (F(3) - F(2)) \end{aligned}$$

Aufgabe W3:

a) Die Kantenlänge des Würfels beträgt $|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12$

b) Mittelpunkt der Kante AC: $M\left(\frac{1-3}{2} \mid \frac{2-6}{2} \mid \frac{1+9}{2}\right)$ bzw. $M(-1 \mid -2 \mid 5)$

Der Abstand von M zur oberen Spitze S des Würfels ist 6.

Zur Berechnung der Koordinaten von S wird der Normaleneinheitsvektor der Ebene H benötigt:

Es gilt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wegen $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ gilt $\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Koordinaten von S: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + 6 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

Also gilt S(3|0|9).

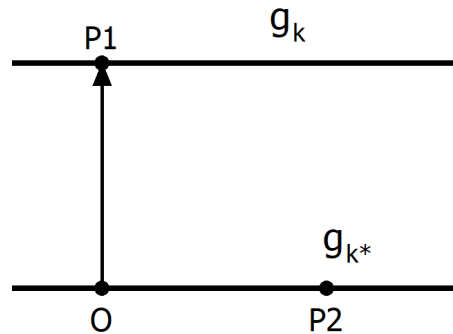
Alternativ kann auch die untere Spitze S* des Würfels berechnet werden.

Koordinaten von S*: $\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OM} - 6 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also gilt S*(-5|-4|1).

Aufgabe W4:

- a) Alle Geraden sind zueinander parallel, da sie denselben Richtungsvektor besitzen.
- b)



Wenn der Punkt P ein benachbarter Punkt von O ist gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit:

Die Punkte O und P (in der Zeichnung mit P1 bezeichnet) liegen auf zwei unterschiedlichen Geraden der Schar.

Dies ist der Fall, wenn der Vektor $\overrightarrow{OP}$ und der Richtungsvektor der Gerade orthogonal zueinander sind.

Da $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 44 + 32 + 5 = 81 \neq 0$ ist, sind die Vektoren nicht orthogonal

zueinander, also scheidet die 1. Möglichkeit aus.

2. Möglichkeit:

Die Punkte O und P (in der Zeichnung mit P2 bezeichnet) liegen auf derselben Schargerade.

Einsetzen des Punktes $O(0|0|0)$ in die Schargerade:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 = k + 4\mu \\ \Leftrightarrow 0 = -4k + 8\mu \\ 0 = k + \mu \end{array}$$

Zeile (1) – Zeile (3): $0 = 3\mu \Leftrightarrow \mu = 0$

Einsetzen in Zeile ergibt $k = 0$.

Der Ursprung O liegt auf der Gerade $g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kontrolle, ob der Punkt $P(11|4|5)$ auf g_0 liegt:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus Zeile (3) folgt $\mu = 5$

Aus Zeile (2) folgt $\mu = 0,5$.

Daher liegt P nicht auf g_0 .

Damit scheidet auch die Möglichkeit 2 aus.

Somit sind O und P keine benachbarten Eckpunkte des Quadrats.

Aufgabe W5:

Die fehlenden Augenzahlen werden mit x und y und z bezeichnet.

Der Erwartungswert der Augenzahlen beträgt 4.

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert} &= \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot 5 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z = \frac{13}{6} \quad | \cdot 6 \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 13 \end{aligned}$$

Da auf dem Würfel insgesamt nur 3 verschiedene Zahlen vorkommen, gibt es nur folgende Möglichkeiten der Beschriftung, die die obige Gleichung erfüllen:

Fall 1: $x = 3$ und $y = z = 5$

Fall 2: $x = 5$ und $y = z = 4$

$$\begin{aligned} \text{Fall 1 : } P(\text{zweimal dieselbe Zahl bei zweimaligem Würfeln}) &= P(11, 33, 55) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{16}{36} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall 2: } P(\text{zweimal dieselbe Zahl bei zweimaligem Würfeln}) &= P(11, 44, 55) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Da nur Fall 1 die letzte Bedingung erfüllt, ist folgende Würfelbeschriftung für die unsichtbaren drei Würfelseiten möglich:

Einmal die Augenzahl „3“ und zweimal die Augenzahl „5“.

Aufgabe W6:

Ansatz Vierfeldertafel:

	B	$\bar{B}$	
A	3x	1-5x	1-2x
$\bar{A}$	x	x	2x
	4x	1-4x	1

$$P_B(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3x}{P(B)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(B) = 4x$$

$$\text{Daraus folgt } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 4x - 3x = x$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = x$$

Die roten Werte ergeben sich durch Addition und Subtraktion der Zeilen und Spalten aufgrund der schwarzen eingetragenen Werte.

$$\text{Da } P(A \cap \bar{B}) = 1 - 5x \geq 0 \text{ gelten muss folgt daraus } x \leq \frac{1}{5}.$$