Hauptprüfung Abiturprüfung 2024 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil A - Pflichtaufgaben

Hilfsmittel: keine

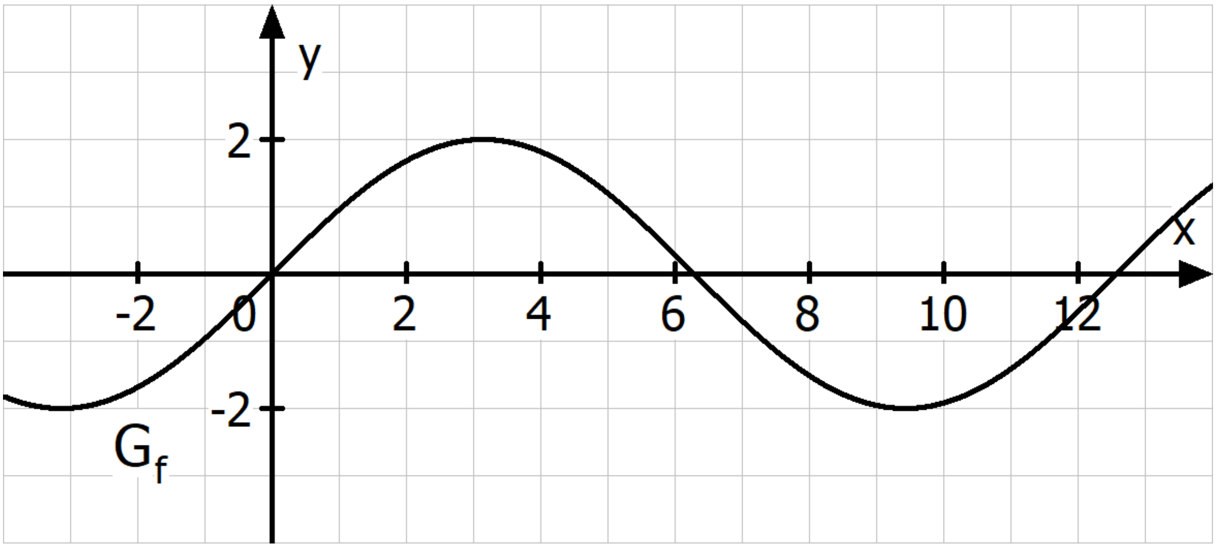
allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe P1: (2 BE und 3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit
$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.



a) Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^{8} f(x)dx$ negativ ist.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:
Die Tangente an G_f im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte (-1|-1) und (1|1).

Aufgabe P2: (2 BE und 3 BE)

G_f ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{2x-1}$.

a) G_f besitzt einen Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse und eine Asymptote. Geben Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts sowie eine Gleichung dieser Asymptote an.

b) G_g ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x}$. Es gilt $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Zeigen Sie, dass sich G_f und G_g an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ orthogonal schneiden.

Aufgabe P3: (2 BE und 3 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $E_a: 2ax_1 - 4x_2 + (a-2)\cdot x_3 = 12$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den E_a parallel zur Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ verläuft.

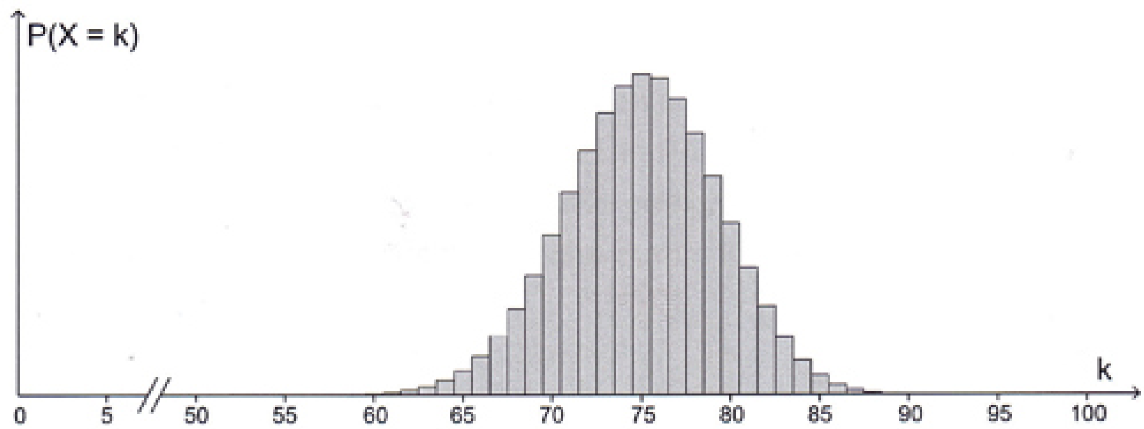
b) Prüfen Sie, ob die Ebene mit der Gleichung $6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$ zur Schar gehört.

Aufgabe P4: (2 BE und 3 BE)

Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl, wie oft dabei die Farbe „Blau“, die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb“ erzielt wird.

a) Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben.

b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

Lösungen

Aufgabe P1:

a) Das Integral beschreibt den orientierten Inhalt der Fläche, die der Graph G_f, die x-Achse und die senkrechten Geraden x = -2 und x = 8 einschließen.
Da der Flächeninhalt oberhalb der x-Achse größer ist als der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse, ist der Wert des Integrals positiv, also nicht negativ.

b) Tangentengleichung im Ursprung O(0|0):

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$
Einsetzen der Berührstelle u = 0: $y = f'(0)\cdot(x-0)+f(0)$

Es gilt $f(0) = 2\cdot\sin(0) = 0$.
Wegen $f'(x) = 2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ gilt $f'(0) = \cos(0) = 1$.
Gleichung der Tangente: $y = 1\cdot(x-0)+0 \Leftrightarrow y = x$

Da die Gerade y = x durch die Punkte (-1|-1) und (1|1) verläuft ist nachgewiesen, dass die Aussage richtig ist.

Aufgabe P2:

a) G_f schneidet nicht die x-Achse, somit ist nach dem Schnittpunkt mit der y-Achse gefragt.
Es gilt $f(0) = e^{-1}$, daher lautet der Schnittpunkt $S_y(0\,|\,e^{-1})$

Die Gleichung der (waagrechten) Asymptote lautet y = 0.

Zusatzhinweis: Für $x \to -\infty$ strebt $e^{2x-1} \to 0$.
Daher existiert die waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$.

b) Bedingung für den senkrechten Schnitt der Schaubilder an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$:

(1) $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$ (gemeinsamer Punkt)

(2) $f'(\frac{1}{2})\cdot g'(\frac{1}{2}) = -1$ (Tangenten bei $x_0 = \frac{1}{2}$ sind orthogonal zueinander)

Es gilt $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = e^0 = 1$, daher ist (1) erfüllt.

Wegen $f'(x) = 2e^{2x-1}$ gilt $f'(\frac{1}{2}) = 2e^0 = 2$.

Daraus folgt $f'(\frac{1}{2})\cdot g'(\frac{1}{2}) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, daher ist (2) erfüllt.

Daraus folgt, dass sich die Schaubilder bei $x_0 = \frac{1}{2}$ orthogonal schneiden.

Aufgabe P3:

a) Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene, wenn der Richtungsvektor der Gerade orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist.

Bedingung: $\begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2a + 0 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

b) Die Ebene kann nur dann zur Schar gehören, wenn die Normalenvektoren der Ebenen parallel (also Vielfache) zueinander sind:

Bedingung: $\begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aus Zeile 2 folgt k = 0,5.
Aus Zeile 1 folgt a = 1,5.
Aus Zeile 3 folgt a = 2,5 und damit widersprüchlich zu a = 1,5.

Da es keine Werte für k und a gibt, dass die Bedingung erfüllt wird, gehört die angegebene Ebene nicht zur Schar.

Aufgabe P4:

a) Die Wahrscheinlichkeit für „Blau“ sei p.
Die Wahrscheinlichkeit für „Gelb“ ist dann 1 – p.

X ist binomialverteilt mit n = 100 und Trefferwahrscheinlichkeit p.

Standardabweichung von X: $\sqrt{100\cdot p\cdot(1-p)}$

Y ist binomialverteilt mit n = 100 und Trefferwahrscheinlichkeit 1-p.

Standardabweichung von Y: $\sqrt{100\cdot(1-p)\cdot(1-(1-p))} = \sqrt{100\cdot(1-p)\cdot p}$

Damit stimmen die Standardabweichungen von X und Y überein.

b) Der Erwartungswert von X ist 75, da sich dort die höchste Säule befindet.

Daraus folgt: $E(X) = n \cdot p \Leftrightarrow 75 = 100 \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$

Da die Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ ist, gibt es $20 \cdot \frac{3}{4} = 15$ blaue Sektoren.