

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2024

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

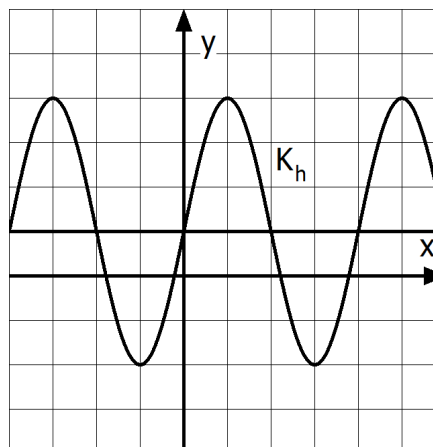
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

- 4.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse.
Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f .
Zeichnen Sie das Schaubild für $-2 \leq x \leq 5$. (9 Punkte)
- 4.2 Zeigen Sie, dass die Gerade $g: y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$ das Schaubild K_f in $R(-1|-1)$ berührt und in $S(5|12,5)$ schneidet.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der Geraden g und K_f eingeschlossen wird. (8 Punkte)
- 4.3 Überprüfen Sie, ob Punkte auf K_f existieren, in denen die Steigung der Tangente den Wert -2 annimmt.
Geben Sie die kleinstmögliche Steigung von K_f an. (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 3 \sin(2x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h .

- 4.4 Ergänzen Sie die Skalierung im nebenstehenden Koordinatensystem. (2 Punkte)

- 4.5 Beschreiben Sie eine Vorgehensweise zur Bestimmung der Koordinaten von zwei Wendepunkten für $x \leq 0$. Geben Sie die Koordinaten für zwei dieser Punkte an. (3 Punkte)



- 4.6 Begründen Sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch sind.
(1) Die Ableitungsfunktion h' von h hat die gleiche Periode wie h .
(2) Die zweite Ableitungsfunktion h'' von h hat die gleiche Amplitude wie h .

(4 Punkte)

Lösung

4.1 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

Bedingung: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Gleichung II) $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $N_1(0 | 0)$ und $N_2(3 | 0)$.

Es gilt $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$ und $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I) $x = 0$

Gleichung II) $\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

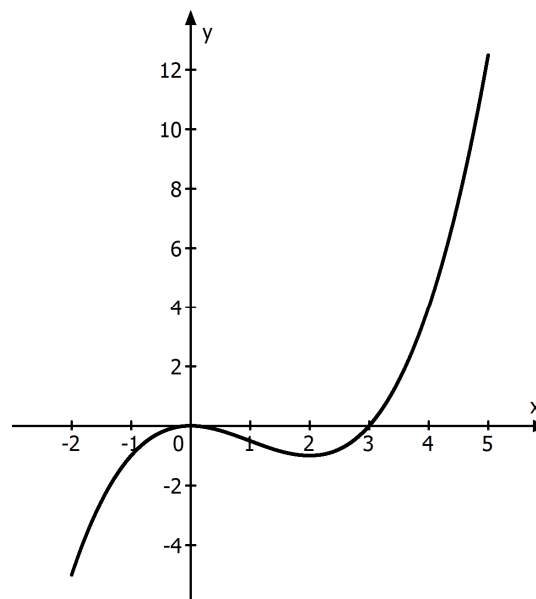
$f''(0) = -\frac{3}{2} < 0$, das heißt Maximalstelle bei $x = 0$

$f''(2) = \frac{3}{2} > 0$, das heißt Minimalstelle bei $x = 2$.

Wegen $f(0) = 0$ lautet der Hochpunkt $H(0|0)$.

Wegen $f(2) = -1$ lautet der Tiefpunkt $T(2|-1)$.

Zeichnung:



4.2 Damit die Gerade $g(x) = \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$ das Schaubild von f berühren müssen 2

Bedingungen erfüllt sein:

1. Bedingung:

Der Punkt R muss auf der Geraden und dem Schaubild von f liegen:

Wegen $g(-1) = -1$ und $f(-1) = -1$ ist diese Bedingung erfüllt.

2. Bedingung:

Die Steigung der Gerade und des Schaubildes von f an der Stelle $x = -1$ müssen gleich sein.

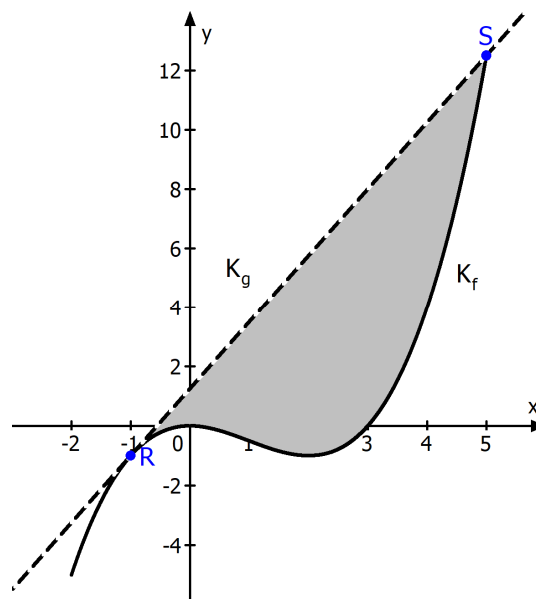
Es gilt $g'(x) = \frac{9}{4}$ und $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$.

Wegen $g'(-1) = f'(-1) = \frac{9}{4}$ ist diese Bedingung erfüllt.

Der Punkt $S(5|12,5)$ muss auf der Geraden und auf dem Schaubild von f liegen.

Kontrolle: $g(5) = 12,5$ und $f(5) = 12,5$

Da $f'(5) \neq g'(5)$ ist, berühren sich die Schaubilder im Punkt S nicht, sondern schneiden sich tatsächlich.



Die Grenzen des Integrals ergeben sich aus der nachgewiesenen Berührung im Punkt R und des Schnittes im Punkt S.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^5 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^5 \left(\frac{9}{4}x + \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \right) \right) dx = \int_{-1}^5 \left(\frac{9}{4}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right) dx \\
 &= \left[\frac{9}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 \right]_{-1}^5 = \frac{425}{16} - \left(-\frac{7}{16} \right) = 27 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

4.3 Bedingung: $f'(x) = -2$

Mit $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$ muss gelten: $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = -2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 = 0$

$$\text{Lösung mit der abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2}}{2 \cdot \frac{3}{4}}$$

Da der Term unter der Wurzel negativ ist, besitzt die Gleichung keine Lösung. Somit gibt es keine Punkte mit der Steigung -2.

Bedingung für Wendestelle: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Es gilt $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ und $f'''(x) = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

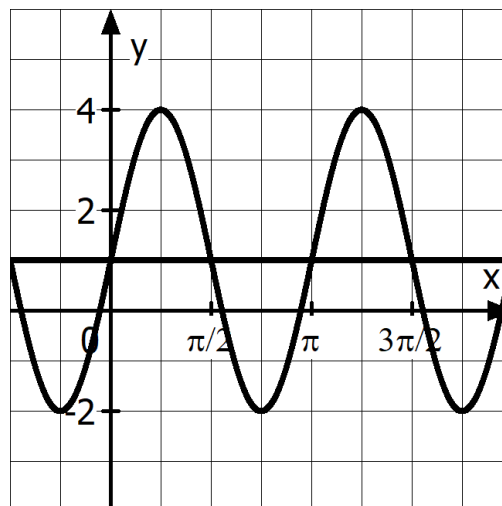
$f'''(1) = \frac{3}{2} \neq 0$, somit existiert eine Wendestelle bei $x = 1$

Es gilt $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

Wegen $f'(1) = -\frac{3}{4}$ ist $m = -\frac{3}{4}$ die kleinstmögliche Steigung.

4.4 Die waagrechte Mittellinie des Schaubildes befindet sich auf der Höhe 1, daher entspricht 1 Kästchen auf der y-Achse 1 LE.

Die Periode des Schaubildes ist $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Die Periode umfasst 4 Kästchen auf der x-Achse.



4.5 Die Wendepunkte befinden sich auf Höhe der Mittellinie des Schaubildes und haben daher den y-Wert 1.

Die Wendepunkte haben den Abstand einer halben Periode.

Mögliche Wendepunkte: $W(0 | 1)$ oder $W(-\frac{\pi}{2} | 1)$ oder $W(-\pi | 1)$

4.6

(1) Es gilt $h'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \cos(2x) = 6 \cdot \cos(2x)$

Die Periode der Ableitungsfunktion beträgt $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ und stimmt daher mit der Periode von h überein. Die Aussage ist wahr.

(2) Es gilt $h''(x) = -6 \cdot 2 \cdot \sin(2x) = -12 \cdot \sin(2x)$

Die Amplitude von h'' beträgt 12.

Die Amplitude von h beträgt 3. Die Aussage ist falsch.