

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2024

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

2.1 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K_f und geben Sie das Krümmungsverhalten von K_f an. Zeichnen Sie K_f für $-1,5 \leq x \leq 1,5$.

(10 Punkte)

2.2 K_f und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein. Markieren Sie die beschriebene Fläche in Ihrer Zeichnung aus 2.1. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

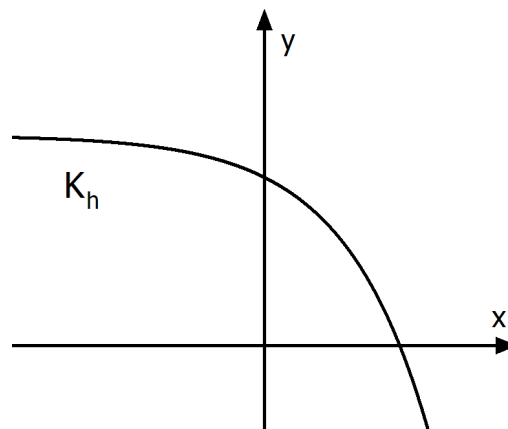
(5 Punkte)

2.3 Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit einer Nullstelle im Ursprung und einer weiteren an der Stelle $x = 3$, an der das Schaubild die x -Achse berührt. Weiterhin liegt der Punkt $P(-1|-4)$ auf dem Schaubild von g . Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g .

(4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -e^{0,5x} + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h .

2.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_h . (4 Punkte)



2.5 Die Punkte $A(0|0)$, $B(u|0)$, $C(u|h(u))$ und $D(0|h(u))$ bilden für $0,5 \leq u \leq 3$ ein Rechteck. Skizzieren Sie diesen Sachverhalt.

Bestimmen Sie u so, dass der Umfang des Rechtecks maximal wird.

Geben Sie den maximalen Umfang an.

(7 Punkte)

Lösung

- 2.1 Die Funktionsgleichung enthält nur gerade Exponenten (Hochzahlen) bei der Variable x . Das Schaubild K_f ist daher symmetrisch zur y -Achse.

Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Es gilt $f'(x) = -8x^3 + 8x$ und $f''(x) = -24x^2 + 8$ und $f'''(x) = -48x$.

$$-24x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$f'''(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -48 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \neq 0$ somit existiert bei $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ eine Wendestelle

Wegen $f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{19}{9}$ lautet der Wendepunkt $W_1(\sqrt{\frac{1}{3}} | \frac{19}{9})$.

$f'''(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = -48 \cdot (-\sqrt{\frac{1}{3}}) \neq 0$ somit existiert bei $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ eine Wendestelle

Wegen $f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{19}{9}$ lautet der Wendepunkt $W_2(-\sqrt{\frac{1}{3}} | \frac{19}{9})$.

Hinweis: Die Koordinaten von W_2 könnte man auch direkt aus W_1 unter Nutzung der Symmetrie von K_f ermitteln.

Krümmung für $x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$: $f''(-1) = -16 < 0$ also Rechtskrümmung.

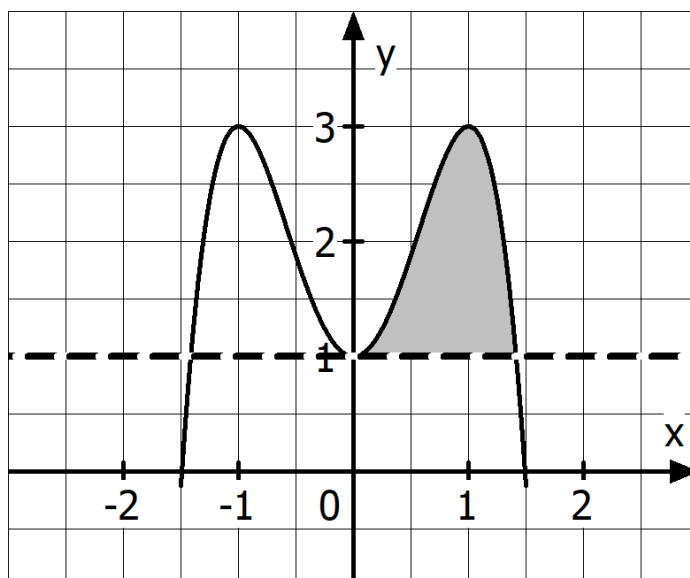
Daraus folgt:

Schaubild ist rechtsgekrümmt im Intervall $\left] -\infty; -\sqrt{\frac{1}{3}} \right]$

Schaubild ist linksgekrümmt im Intervall $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}} \right]$

Schaubild ist rechtsgekrümmt im Intervall $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}; +\infty \right[$

Zeichnung:



2.2 Die Markierung der Fläche ist in der Zeichnung unter 2.1 erfolgt.

Schnittstellen des Schaubilds von f und der Geraden $y = 1$:

$$-2x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x^4 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (-2x^2 + 4) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:

I) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

II) $-2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Flächeninhalt:

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} (f(x) - 1) dx = \int_0^{\sqrt{2}} (-2x^4 + 4x^2) dx = \left[-\frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \approx 1,51$$

2.3 Die Nullstelle $x = 3$ ist eine doppelte Nullstelle, da dort das Schaubild die x -Achse berührt.

Die Nullstelle $x = 0$ ist eine einfache Nullstelle.

Ansatz für die Funktion: $g(x) = a \cdot x \cdot (x - 3)^2$

Einsetzen von $P(-1|-4)$: $-4 = a \cdot (-1) \cdot (-1 - 3)^2 \Leftrightarrow -4 = -16a \Leftrightarrow a = 0,25$

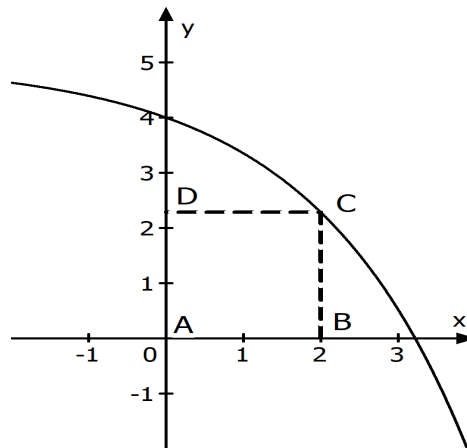
Funktionsgleichung: $g(x) = 0,25 \cdot x \cdot (x - 3)^2$

2.4 Schnittpunkt mit der y -Achse: $h(0) = -e^0 + 5 = 4 \Rightarrow S_y(0|4)$

Schnittpunkt mit der x -Achse: $h(x) = 0$:

$$-e^{0,5x} + 5 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 5 \Leftrightarrow 0,5x = \ln(5) \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln(5) \text{ also } N(2 \cdot \ln(5)|0)$$

2.5 Skizze:



Umfangsformel des Rechtecks: $U = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC}$

Es gilt: $\overline{AB} = u - 0 = u$ und $\overline{BC} = h(u) - 0 = h(u)$

Die Zielfunktion lautet: $U(u) = 2 \cdot u + 2 \cdot h(u) = 2u + 2 \cdot (-e^{0,5u} + 5) = 2u - 2e^{0,5u} + 10$

Bedingung für das lokale Maximum der Funktion $U(u)$: $U'(u) = 0$ und $U''(u) < 0$

Es gilt $U'(u) = 2 - 2e^{0,5u} \cdot 0,5 = 2 - e^{0,5u}$ und $U''(u) = -0,5 \cdot e^{0,5u}$

$2 - e^{0,5u} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5u} = 2 \Leftrightarrow 0,5u = \ln(2) \Leftrightarrow u = 2\ln(2)$

$U''(2\ln(2)) = -0,5 \cdot e^{0,5 \cdot 2\ln(2)} = -1 < 0$

Damit existiert für $u = 2\ln(2)$ ein lokales Maximum mit $U(2\ln(2)) \approx 8,77$

Untersuchung der Randwerte: $U(0,5) \approx 8,43 < 8,77$ und $U(3) \approx 7,04 < 8,77$.

Damit ist der Umfang maximal für $u = 2\ln(2)$.

Der maximale Umfang beträgt 8,77 LE.