

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2024

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe 1:

- 1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f . Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f .

(5 Punkte)

- 1.2 Lösen Sie die Gleichung $x \cdot (x^3 + 1) \cdot (2x - 3) = 0$.

(3 Punkte)

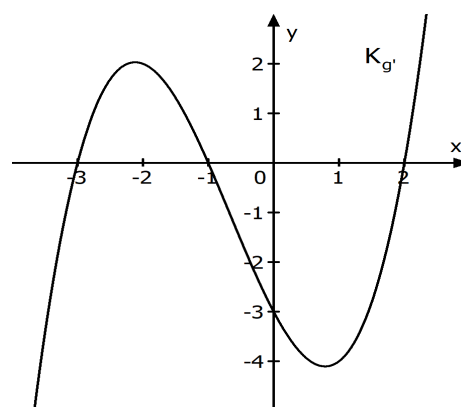
- 1.3 Beschreiben Sie, wie das Schaubild mit der Gleichung $y = -2e^x + 3$ aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = e^x$ hervorgeht.

(3 Punkte)

- 1.4 Die Abbildung zeigt das Schaubild $K_{g'}$ der Ableitungsfunktion g' einer Funktion g . Das Schaubild von g ist K_g . Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(6 Punkte)

- (1) K_g besitzt genau zwei Wendepunkte.
 (2) K_g besitzt genau zwei Hochpunkte.
 (3) K_g besitzt genau zwei Tangenten, die parallel zur 1. Winkelhalbierenden verlaufen.



- 1.5 Berechnen Sie die Stammfunktion der Funktion h mit $h(x) = 4 \sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild durch den Punkt $P(\pi | 1)$ verläuft.

(4 Punkte)

- 1.6 Das Schaubild mit der Gleichung $y = a \cdot e^x + b$ schneidet die y -Achse in $S(0|-1)$ und ihre waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = -3$. Bestimmen Sie a und b .

(4 Punkte)

- 1.7 Geben Sie jeweils einen möglichen Wert für c an, so dass die Gleichung $2\cos(x) + 1 = c$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$ genau eine, zwei oder keine Lösung hat.

(5 Punkte)

Lösung

1.1 $f(x) = x^3 - 12x$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \quad f''(x) = 6x$$

Bedingung für einen Extrempunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt } H(-2|f(-2))$$

Wegen $f(-2) = -8 + 24 = 16$ lautet der Hochpunkt $H(-2|16)$.

$$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt } T(2|f(2))$$

Wegen $f(2) = 8 - 24 = -16$ lautet der Tiefpunkt $T(2|-16)$

1.2 $x \cdot (x^3 + 1) \cdot (2x - 3) = 0$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$x_1 = 0$$

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x_2 = -\sqrt[3]{1} = -1$$

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{3}{2}$$

1.3 Ausgangsfunktion: $y = e^x$

1.) Spiegelung des Schaubilds an der x-Achse: $y = -e^x$

2.) Streckung des Schaubilds in y-Richtung mit dem Faktor 2: $y = -2e^x$

3.) Verschiebung des Schaubilds um 3 Längeneinheiten nach oben:
 $y = -2e^x + 3$

1.4

- (1) Die Aussage ist wahr. Das Schaubild der Ableitungsfunktion g' hat zwei Extremstellen, somit hat das Schaubild von g zwei Wendestellen, also auch zwei Wendepunkte.
- (2) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion hat bei $x = -1$ nur eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Somit hat das Schaubild von g auch nur einen Hochpunkt.
- (3) Die Aussage ist falsch. Die 1. Winkelhalbierende ist die Gerade mit der Gleichung $y = x$ und besitzt die Steigung 1. Das Schaubild von g hat drei Tangenten mit der Steigung 1 und nicht nur zwei. Dies ist so erkennbar: Zeichne eine waagrechte Gerade $y = 1$ in die Abbildung von g' ein. Diese Gerade schneidet das Schaubild von g' an drei Stellen.

1.5 $h(x) = 4 \sin(2x)$

$$H(x) = -4 \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} + C = -2 \cos(2x) + C$$

Einsetzen des Punktes $P(\pi | 1)$: $1 = -2 \cos(2\pi) + C \Leftrightarrow 1 = -2 + C \Leftrightarrow C = 3$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $H(x) = -2 \cos(2x) + 3$

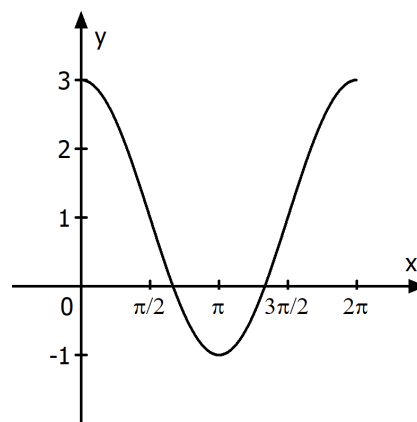
1.6 Das Schaubild der Funktion $y = a \cdot e^x + b$ hat die waagrechte Asymptote $y = b$.

Da die waagrechte Asymptote $y = -3$ ist, gilt $b = -3$.

Zwischenergebnis: $y = a \cdot e^x - 3$

Einsetzen des Punktes $S(0 | -1)$: $-1 = a \cdot e^0 - 3 \Leftrightarrow a = 2$

1.7 Zunächst wird das Schaubild von $f(x) = 2 \cos(x) + 1$ skizziert im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.



Bei der Gleichung $2 \cos(x) + 1 = c$ ist c ein gegebener y -Wert eines Punktes.

Für $c = -1$ gibt es nur eine Lösung (nämlich $x = \pi$).

Für alle Werte von c mit $-1 < c \leq 3$ gibt es zwei Lösungen (z.B. $c = 0$ oder $c = 1$).

Für alle Werte von c mit $c > 3$ oder $c < -1$ gibt es keine Lösung (z.B. $c = 4$).